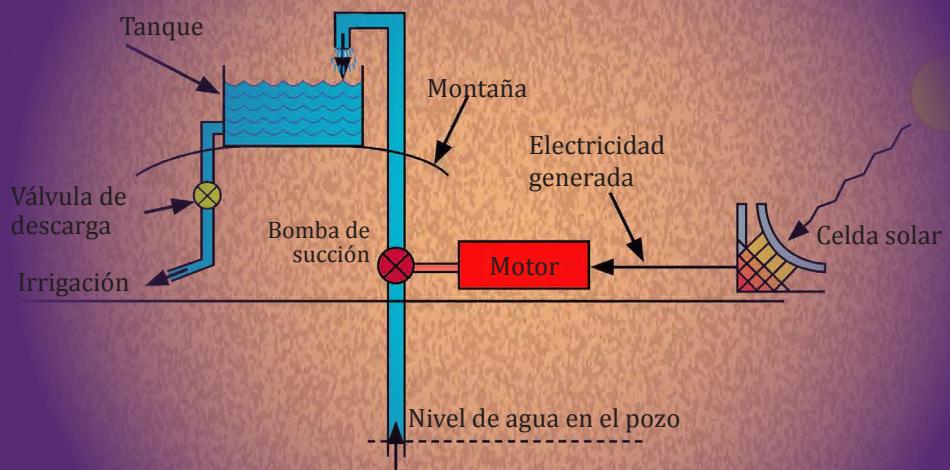


# Sistemas Automáticos de Control

## Fundamentos Básicos de Análisis y Modelado



*Sistemas Automáticos de Control*  
*Fundamentos Básicos de Análisis y Modelado*



*Alí José Carrillo Paz*

*Sistemas Automáticos de Control  
Fundamentos Básicos de Análisis y Modelado*



**UNERMB**

Universidad Nacional Experimental  
“Rafael María Baralt”

Fondo Editorial UNERMB

Universidad Nacional Experimental  
“Rafael María Baralt”  
**UNERMB**

*Colección Un Profesor, un libro*

Publicación auspiciada por el Programa de Ingeniería y  
Tecnología  
Director Mgs. Jhon Lamberto

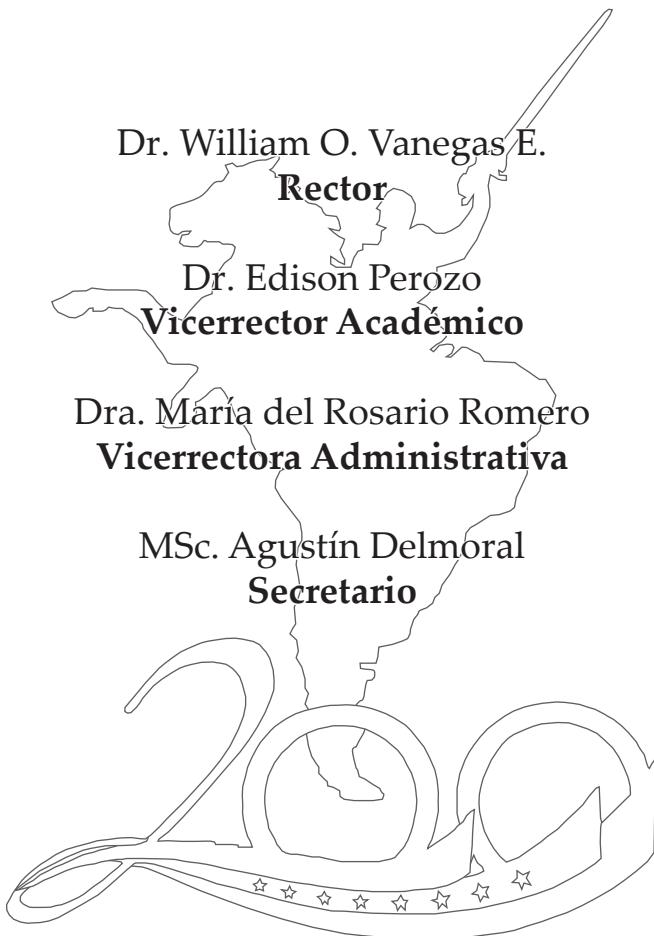
**Sistemas Automáticos de Control**  
*Fundamentos Básicos de Análisis y Modelado*  
© Alí José Carrillo Paz, 2011  
**Revisión Técnica:** Dr. José Morón  
2da. edición.  
**Depósito legal:** lf 9562011620860  
**ISBN:** 978-980-6792-12-8

**Fondo Editorial UNERMB**  
Coordinador: MSc. Jorge Luis Barboza

**Portada:** Manuel Cedeño  
**Diagramación interna:** Fondo Editorial UNERMB  
**Impreso en:** Imprenta UNERMB  
Tlf.: 0264 9342900  
Santa Rita, Edo. Zulia, Venezuela.  
Correo electrónico: [fondoeditorialunerm@gmail.com](mailto:fondoeditorialunerm@gmail.com)



Universidad Nacional Experimental  
“Rafael María Baralt”  
**UNERMB**



*Año Bicentenario de la firma del  
Acta de la Declaración de Independencia*



# ÍNDICE

<i>Dedicatoria</i>	11
<i>Agradecimientos</i>	13
<i>Introducción</i>	15
<b>CAPÍTULO 1</b>	
<b>INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL</b>	<b>19</b>
<i>Introducción</i> .....	19
<i>Introducción a los sistemas de control</i> .....	19
<i>Ejemplos de sistemas de control</i> .....	20
<i>Sistema de control de velocidad</i> .....	20
<i>Sistema de control de temperatura</i> .....	22
<i>Sistema de control de nivel</i> .....	22
<i>Conceptos básicos de sistemas de control</i> .....	22
<i>Tipos de sistemas de control</i> .....	
<i>Análisis de la realimentación</i> .....	25
<b>REFERENCIAS</b> .....	29
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS</b>	<b>31</b>
<i>Introducción</i> .....	31
<i>La Transformada de Laplace</i> .....	32
<i>Definición de Transformada de Laplace</i> .....	32
<i>Propiedades de la Transformada de Laplace</i> .....	34
<i>Resumen de transformadas</i> .....	45
<i>Transformada inversa de Laplace</i> .....	46
<i>Definición de la transformada de Laplace</i> .....	46
<i>Método de fracciones parciales</i> .....	49
<i>Aplicaciones de la Transformada de Laplace a ecuaciones diferenciales</i> .....	54
<i>Convolución de funciones</i> .....	55
<i>Transformada de la función delta de Dirac</i> .....	56
<i>Desarrollo de fracciones parciales usando Matlab</i> .....	58

<i>PROBLEMAS.....</i>	61
<i>REFERENCIAS.....</i>	64
<b>CAPÍTULO 3</b>	
<b>LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA</b>	
<i>Gráficos de flujo de señal y diagramas de bloques .....</i>	65
<i>Introducción.....</i>	65
<i>Definición de función de transferencia.....</i>	65
<i>Propiedades de la función de transferencia.....</i>	68
<i>Función de transferencia de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas.....</i>	68
<i>Diagramas de bloques de un sistema.....</i>	69
<i>Elementos de un diagrama de bloques.....</i>	70
<i>Representación de ecuaciones diferenciales por diagramas de bloques.....</i>	71
<i>Gráficos de flujo de señal.....</i>	75
<i>Definición de gráficos de señal.....</i>	75
<i>Elementos de un diagrama de flujo de señal.....</i>	75
<i>Representación de un sistema en diagramas o gráficos de flujo de señal.....</i>	76
<i>Métodos para determinar ganancias de sistemas usando diagramas de flujo de señal o diagramas de bloques.....</i>	78
<i>Método de reducción de diagrama de bloques o álgebra de bloques.....</i>	78
<i>Fórmula de ganancia de Mason para diagramas de flujo de señal.....</i>	82
<i>Introducción a las matrices de estado.....</i>	86
<i>Defición de ecuación de estado.....</i>	86
<i>Ecuación de estado de una ecuación de diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales.....</i>	87
<i>Ecuación de estado y gráfico de flujo de señal.....</i>	89
<i>PROBLEMAS.....</i>	92
<i>REFERENCIAS.....</i>	97

<b>CAPÍTULO 4</b>	
<b>MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS</b>	<b>99</b>
<i>Introducción.....</i>	99
<i>Metodología para el análisis y diseño de sistemas de control.....</i>	100
<i>Modelado de sistemas eléctricos.....</i>	101
<i>Modelado de sistemas mecánicos.....</i>	108
<i>Sistemas mecánicos traslacionales.....</i>	108
<i>Sistemas mecánicos de rotación.....</i>	115
<i>Sistemas electromecánicos.....</i>	121
<i>Sistemas análogos.....</i>	128
<i>Sistema de transmisión de correa.....</i>	134
<i>Transformación de modelos matemáticos usando Matlab.....</i>	137
<i>PROBLEMAS.....</i>	139
<i>REFERENCIAS.....</i>	146
<b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO</b>	<b>149</b>
<i>Introducción.....</i>	149
<i>Métodos de solución de la ecuación de variables de estado.....</i>	150
<i>Método de solución matriz de transición de estado.....</i>	150
<i>Método de solución de matriz A diagonalizada.....</i>	151
<i>Método de solución de la transformada de Laplace.....</i>	153
<i>Método de diagonalización o vectores característicos.....</i>	155
<i>Método de solución interpolación de Sylvester.....</i>	158
<i>Observabilidad y controlabilidad.....</i>	161
<i>Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria.....</i>	166
<i>Error de estado estacionario.....</i>	167
<i>Cálculo de errores de estado estacionario para tipos de sistema de control.....</i>	169
<i>Respuesta en el tiempo de sistemas de primer orden.....</i>	176
<i>Respuesta en el tiempo de sistemas de segundo orden.....</i>	178
<i>Controladores automáticos industriales.....</i>	187
<i>Controlador de dos posiciones o de encendido-apagado.....</i>	188

<i>Controlador proporcional</i> .....	189
<i>Controlador derivativo</i> .....	189
<i>Controlador integral</i> .....	190
<i>Controladores combinados</i> .....	190
<i>Controladores proporcionales integrales</i> .....	190
<i>Controladores proporcionales integrales derivativos</i> .....	191
<i>Sensibilidad en los sistemas realimentados</i> .....	193
<i>Respuesta transitoria y estacionaria con Matlab</i> .....	195
<i>PROBLEMAS</i> .....	197
<i>REFERENCIAS</i> .....	203
<b>CAPÍTULO 6</b>	
<b>ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS DE CONTROL</b>	<b>205</b>
<i>Introducción</i> .....	205
<i>Concepto de estabilidad</i> .....	206
<i>Métodos para determinar la estabilidad</i> .....	209
<i>Criterio de Routh-Hourwitz</i> .....	209
<i>Criterio de Nyquist</i> .....	214
<i>Determinación de la estabilidad usando Matlab</i> .....	228
<i>PROBLEMAS</i> .....	230
<i>REFERENCIAS</i> .....	232
<b>CAPÍTULO 7</b>	
<b>TÉCNICA DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE RAÍCES</b>	<b>233</b>
<i>Introducción</i> .....	233
<i>Método del lugar geométrico de raíces</i> .....	234
<i>Propiedades de construcción del lugar geométrico de raíces</i> .....	235
<i>PROBLEMAS</i> .....	250
<i>REFERENCIAS</i> .....	252

## **DEDICATORIA**

*En especial a la memoria de mi madre Ana T. Paz.  
A mis hijos Estephany, Alí Jim y José T.  
A mi esposa Hau Fung Moy.*

*A mis familiares muy cercanos que son fuente de inspiración  
para el logro de mis metas: Maximiliano, Flor, Vinicio, Rafael,  
José Manuel, Carmen, Julio, Augusto, Francisco, Ana I., José E.,  
Maximiliano Xavier, Eugenia, Joan Javiel, Cira, Víctor, Marina y  
José F.*



## **AGRADECIMIENTOS**

*Al Profesor José Morón, por su incansable guía en la elaboración  
de este texto, a usted mil gracias.*

*A mi esposa Hau Moy, por el apoyo brindado durante estos dos  
años de arduo trabajo.*

*A Leowardo Hernández, por su apoyo en la elaboración de esta  
obra.*



## ***Introducción***

En las últimas décadas la sociedad industrializada hace un uso extenso de los sistemas automatizados. Tanto en la vida cotidiana como en la industria se destacan sistemas de control que regulan magnitudes de temperatura, presión, flujo, seguridad, electrónica y la robótica en lo concerniente al desarrollo de microcontroladores y los sistemas inalámbricos; hoy en día todo es controlado, con el objeto de optimizar y mejorar el desempeño de los procesos dentro de los sistemas automatizados manteniéndolos dentro de parámetros preestablecidos en los requerimientos del cliente (Sociedad Industrial). Por ello es necesario un adecuado estudio de los sistemas a controlar, así como también un buen nivel de conocimientos referente al análisis y diseño de los Sistemas de Control.

El notable desarrollo de la informática y la electrónica, han permitido la incorporación de nuevas técnicas y procedimientos que para un determinado proceso, resuelven problemas de teoría clásica de control, por su puesto, basándose en los métodos clásicos de diseño implantados a mediados del siglo pasado; por ello es primordial el estudio preliminar de la teoría clásica de control de sistemas, a partir de la relación de entrada-salida.

Por esta causa la ingeniería de sistemas de control forma parte del plan de estudios de numerosas escuelas de ingeniería, así como en facultades de ciencias.

En la actualidad existen numerosas obras de prestigiosos autores que brindan al estudiante y al profesional un medio

adecuado para la comprensión de las técnicas clásicas de control de los sistemas. Sin embargo, tanto profesores como estudiantes de estas asignaturas han demandado la falta de textos que se adapten de manera organizada a los programas vigentes en diferentes universidades, de ello no se escapan los cursos de sistemas de control clásico (teoría de control clásico) que imparto, lo cual requiero de la recomendación de varias obras para abordar el contenido programático de dicha asignatura. Aunado a esto, los problemas de traducción que presentan muchas de estas obras hacen que dificulten la comprensión de los contenidos de la materia.

Este libro está escrito de acuerdo al contenido usual de un primer curso de sistemas de control (Teoría Clásica de Control y sus fundamentos); los capítulos se han estructurado adaptándolos al desarrollo del mencionado curso, desarrollándose en ellos los conceptos fundamentales para el análisis y modelado de control de sistemas.

La metodología aplicada en el análisis y diseño de sistemas de control es producto de la experiencia cosechada en el ámbito industrial en los Departamentos de Proyectos de las empresas donde presté mis servicios, aunado a ello, lo que por muchos años he compartido con mis alumnos en los proyectos de grado, como asesor académico, lo que me ha dado resultados exitosos, pero no puedo dejar de expresar la influencia de la metodología aplicada por Clint Smith en su libro *Diseño de redes*.

El libro se ha estructurado en siete capítulos, el primer capítulo se dedica a la introducción de los sistemas de control; el segundo capítulo incluye las bases matemáticas fundamentales (Transformada de Laplace y su aplicación); el tercer capítulo se estudia la función de transferencia basado en la teoría de diagramas de bloque, gráficos de flujo de señal y las aplicaciones a las ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales, también se incorpora la construcción de las ecuaciones de estado (Variable de Estado), partiendo de una o de un sistema de ecuaciones diferenciales.

El cuarto capítulo estudia el modelado de los sistemas físicos, específicamente eléctricos, mecánicos y electromecánicos donde se destaca su representación mediante variables de estado y los métodos de solución para obtener las variables de estado, incorporando los conceptos de observabilidad y controlabilidad de los sistemas. El quinto capítulo realiza un análisis detallado de las respuestas en el tiempo, los errores de estado permanente y los controladores en los sistemas. El capítulo seis trata de los métodos de estudio de la estabilidad de los sistemas de control. Para finalizar, el capítulo siete desarrolla la técnica del lugar geométrico de raíces, herramienta de gran utilidad para el análisis y diseño de sistemas de control retroalimentados.

La elaboración de este libro esta orientado a los cursos de sistemas de control clásico y espero que sea de gran utilidad a estudiantes y profesores de las cátedras en el proceso de aprendizaje de la asignatura. También estoy abierto a la crítica constructiva para la mejora de esta obra.

*Alí José Carrillo Paz*



## **CAPÍTULO 1**

# ***INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL***

### ***Introducción***

El control automático ha desempeñado un papel muy importante en el avance de la ingeniería y la ciencia. Además de su aporte en la construcción de los vehículos espaciales, misiles teledirigidos y la robótica. Los avances en la teoría y la práctica del control automático ofrecen los fundamentos necesarios para obtener un comportamiento óptimo de los sistemas dinámicos, mejorar u optimizar los procesos con el objeto de obtener mejores resultados y simplificar el trabajo de muchas operaciones manuales rutinarias, así como otras actividades, la ingeniería trata de comprender y controlar las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad. La Ingeniería de Control se basa en los fundamentos de la teoría de realimentación y análisis de sistemas lineales, integrando la teoría de redes y de comunicación; por esta razón, la teoría de control no está limitada a un área específica de la ingeniería, sino que es aplicable a las ingenierías aeronáutica, civil, química, mecánica y eléctrica, por tanto, analiza la dinámica de todo tipo de sistemas e incrementa el control de los mismos.

### ***Introducción a los sistemas de control***

La pregunta que nos hacemos comúnmente al iniciar el estudio de la teoría de control es la siguiente: ¿Qué es un sistema de control? Existen muchas definiciones, sin embargo, el concepto que usaremos está basado en los objetivos que se persiguen al

tratar de controlar un sistema, para que opere bajo parámetros definidos previamente. Definimos un *sistema de control* como el conjunto de elementos que funcionan de manera concatenada para proporcionar una salida o respuesta deseada.

Los componentes básicos de un sistema de control pueden ser descritos por:

- Objetivos de control
- Componentes del sistema de control
- Resultados o salida

La relación básica entre estos tres componentes se muestra en la Figura n° 1 los objetivos de control pueden ser identificados como entradas o señales entrantes, los resultados son considerados las salidas o las variables controladas; en general, el objetivo del sistema de control es controlar la salida de manera ordenada actuando los elementos de control sobre la señal de entrada.



Fig. 1. Componentes básicos de un sistema de control.

## Ejemplos de sistemas de control

### Sistema de control de velocidad

En el sistema de control de velocidad mostrado en la Figura n° 2, desarrollado por James Watt, la cantidad de combustible que admite la máquina se ajusta de acuerdo con la diferencia de velocidad establecida como parámetro de operación (*Objetivo de Control*) y la velocidad real de la máquina. El funcionamiento se describe así: el regulador de velocidad se ajusta de manera que al alcanzar la velocidad deseada, no fluya aceite a presión a ningún lado del cilindro de potencia; si la velocidad real cae por debajo de la velocidad deseada debido a una perturbación, la disminución de la fuerza centrífuga del regulador de velocidad hace que la válvula de control se mueva hacia abajo, aportando

más combustible y la velocidad del motor aumenta hasta alcanzar el valor deseado, así mismo, si la velocidad del motor aumenta por encima del valor deseado, el incremento de la fuerza centrífuga hace que la válvula de control se mueva hacia arriba, esto disminuye la entrega de combustible y la velocidad del motor disminuye hasta alcanzar el valor deseado. En este sistema la variable controlada (salida) es la velocidad del motor y el sistema de control es la máquina, y la entrada es el combustible (gasolina).

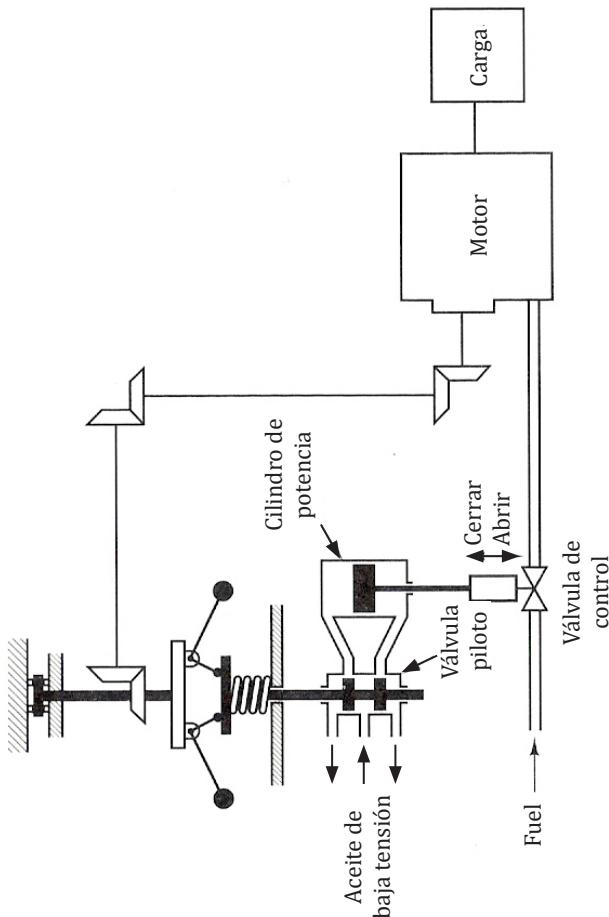


Fig. 2. Sistema de control de velocidad.

## Sistemas de control de temperatura

En la Figura n° 3 se muestra la arquitectura del sistema de control de temperatura de un horno eléctrico. La temperatura se mide con un termómetro, el cual es un dispositivo analógico, esta medición se convierte en datos digitales mediante un convertidor analógico-digital (convertidor A/D), este dato digital se introduce en el controlador a través de una interfaz, se compara con la temperatura programada o deseada y si hay una diferencia, el controlador (computador) envía una señal al calefactor a través de una interfaz, al amplificador y relé para que la temperatura disminuya o aumente según sea el caso, a la temperatura deseada. La salida del sistema es la temperatura, el controlador es el computador y la entrada es la señal del termómetro.

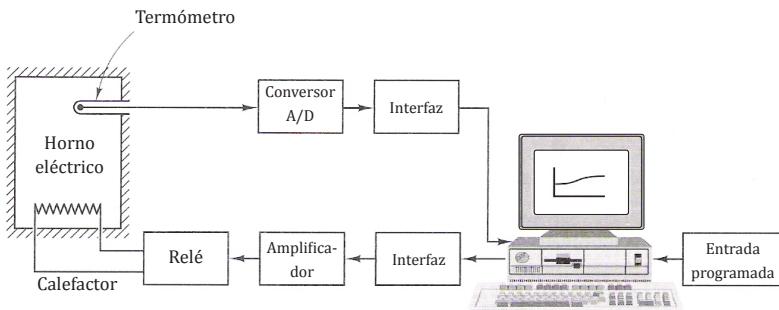


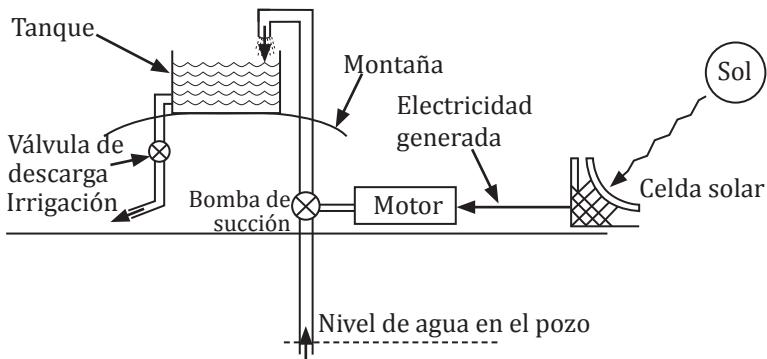
Fig. 3. Sistema de control de temperatura.

## Sistema de control de nivel

Durante las horas de sol en el día la celda solar produce electricidad haciendo que opere el motor, éste hace que la bomba succione el agua desde el pozo para llevarla hasta el reservorio ubicado en la montaña y durante las primeras horas de la mañana, el agua es entregada por medio de un sistema de irrigación a la comunidad (véase la Figura n° 4).

## Conceptos básicos de sistemas de control

**Planta:** se designa como planta a cualquier objeto físico que ha de ser controlado (como horno, reactor químico o un vehículo).



**Fig. 4. Sistema de seguimiento solar para el suministro de agua.**

lo espacial). En forma más general, la planta es la instalación de un sistema destinada a realizar un proceso determinado.

**Proceso:** es una operación progresivamente continua, caracterizada por una serie de cambios graduales con tendencia a producir un resultado final de un objetivo determinado. En adelante, se entenderá por proceso cualquier operación que se vaya a controlar.

**Sistema:** es el conjunto de elementos interconectados y organizados en iteración dinámica operando con un objetivo determinado.

**Entrada:** se entiende como entrada o estímulo una señal de excitación que se aplica a un sistema de control. Las hay de referencia y de perturbación.

La referencia es aquella que se aplica a voluntad del usuario con el fin de encontrar una respuesta deseada.

La perturbación es una señal de entrada no deseada y no previsible que afecta adversamente el valor de la salida del sistema, éstas pueden tener origen interno (generada por la misma planta) o externo.

**Salida:** se define como la respuesta de un sistema a un estímulo dado (variable controlada).

**Control:** desde el punto de vista de ingeniería se define como la regulación en forma predeterminada de la energía su-

ministrada al sistema, buscando un comportamiento deseado del mismo.

### **Tipos de sistemas de control**

Los tipos de sistemas de control más comunes son los sistemas de control a lazo abierto y los sistemas de control a lazo cerrado.

**Sistema de control a lazo abierto:** es aquel sistema de control en el que la salida no es afectada por la señal de entrada. La salida no se realimenta para compararla con la entrada.

Los elementos de un sistema a lazo abierto usualmente están divididos en dos partes, el controlador y el proceso controlado, véase la Figura n° 5.

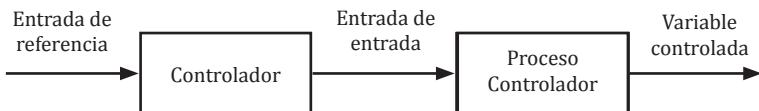
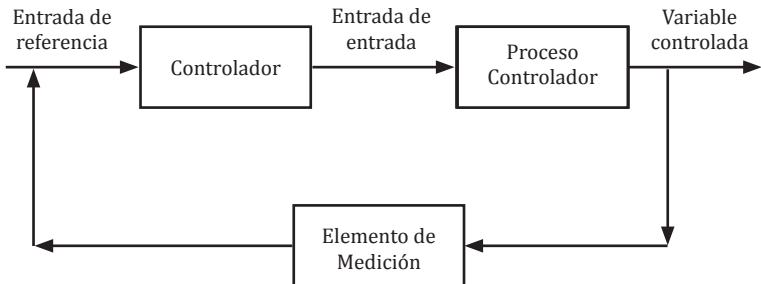


Fig. 5. Elementos de sistema de control a lazo abierto.

Un ejemplo práctico es una lavadora automática; el remojo, el centrifugado y el lavado operan con una base de tiempo. La máquina no mide la señal de salida, la limpieza de la ropa. Otro ejemplo es el sistema de control de tráfico vehicular, éste está basado para operar sobre un tiempo fijo, pero no mide su respuesta que es el tráfico; sin embargo, los sistemas de control de tráfico modernos, computarizados, pueden considerarse de lazo cerrado: se ajustan de acuerdo al flujo de tráfico.

**Sistema de control a lazo cerrado (control realimentado):** en el sistema de control a lazo cerrado, el controlador se alimenta de la señal de error de desempeño, la cual representa la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. El término lazo cerrado siempre indica una acción de control realimentado para reducir el error del sistema. Véase la Figura n° 6.

Una de las ventajas importantes que presenta este tipo de sistema de control es que se hace insensible a las perturbacio-



**Fig. 6. Sistema de control a lazo cerrado.**

nes y mantiene su exactitud; de la comparación de la señal realimentada y la señal de entrada resulta la señal de error, la que es minimizada con la acción de control. Sus principios son aplicables a sistemas que presentan perturbaciones o variaciones imprevisibles en los componentes del sistema.

**Servomecanismo:** es un sistema de control mecánico realimentado (lazo cerrado) que involucra partes en movimiento accionadas por un motor y cuya función es controlar posición, velocidad o aceleración mecánica.

### **Análisis de la realimentación**

La realimentación simple. En un sistema realimentado, se caracteriza por el hecho de que la variable controlada sea temperatura, la velocidad o presión, entre otras variables, son medidas por un sensor y esta información medida es regresada al controlador que influye sobre la variable controlada. El principio es fácilmente ilustrado en un sistema de calefacción casero que no son muy comunes en el trópico, controlado por un termostato. Los componentes de este sistema y sus conexiones son ilustrados en la Figura n° 7.1, la cual identifica la mayor parte del sistema y muestra la dirección del flujo de información de un componente a otro.

Se realiza muy fácilmente un análisis cualitativo de la operación de este sistema. Supóngase que la temperatura de la casa donde está ubicado el termostato y la temperatura exterior está muy por debajo de la temperatura deseada, cuando se aplica la

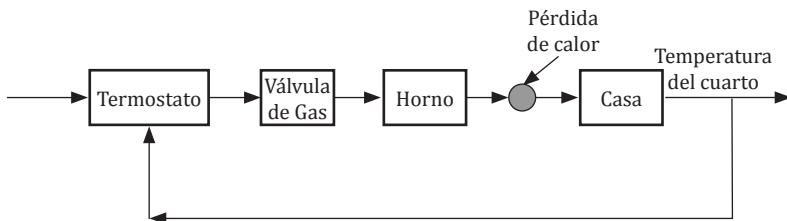


Fig. 7. Sistema de control de temperatura de horno casero.

energía, el termostato estará en activo, transmitiendo energía a la válvula gas del horno o caldera que se abrirá, haciendo que se enciendan y que funcione el ventilador para que entre calor a la casa. Si el calentador (hornos o calderas) está bien diseñado, la cantidad de calor en la entrada será mucho mayor que las perdidas de calor y la temperatura del cuarto aumentará hasta exceder el punto de operación del termostato en una pequeña cantidad. En este momento se apagará la fuente de calor y la temperatura del cuarto tenderá a tomar el valor externo. Cuando ésta baje un grado o más por debajo del punto de operación del termostato, éste se activa de nuevo y el ciclo se repite manteniendo el cuarto dentro de un rango de temperatura deseada.

A partir de este ejemplo se pueden identificar los componentes genéricos de un sistema de control realimentado elemental, el cual se ilustra en la Figura n° 7.1.

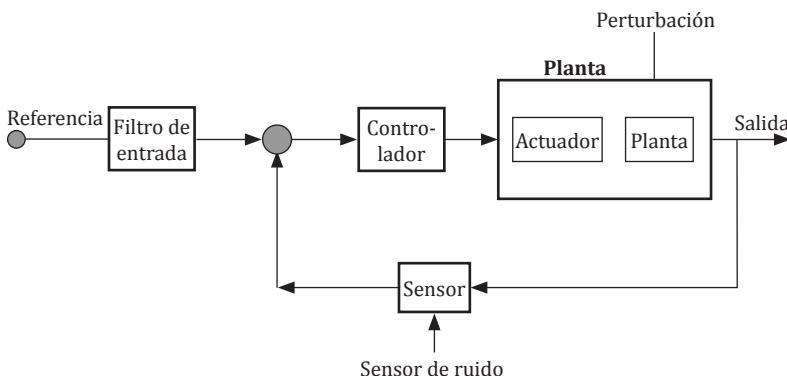


Fig. 7.1. Diagrama de bloques de un sistema de control realimentado simple.

El componente central es el proceso o planta, cuya variable será controlada. En nuestro ejemplo ilustrativo, la planta es el cuarto. La señal de salida es la temperatura en el cuarto y la señal de perturbación es el flujo de calor del cuarto debido a la conducción a través de las paredes a la temperatura exterior más baja (El flujo de calor depende del viento y las puertas abiertas, etc.). El actuador es el dispositivo que puede influir en el proceso, en nuestro caso es la caldera a gas.

En realidad, el horno o caldera tiene una luz piloto, la cual implica usualmente retroalimentación, una válvula de gas, que también implica retroalimentación y un ventilador que con varios controles para el ciclo de operación de encendido y apagado sin realimentación basado en el hecho de la operación eficiente del sistema. Estos detalles se mencionan para ilustrar que muchos sistemas realimentados contienen componentes que forman ellos mismos otros sistemas realimentados. El componente que designamos termostato en la Figura n° 7 se ha dividido en tres partes en la Figura n° 7.1, son la referencia, sensores de salida y comparador (símbolo de adición). Para propósitos de control, hay que medir la variable de salida (temperatura del cuarto), medir la variable de referencia (temperatura deseada) y compararlas.

El valor de la realimentación puede ser demostrada fácilmente por un análisis cuantitativo de un modelo simplificado de un sistema, el control de la velocidad crucero de un automóvil mostrado en la Figura n° 7.3. El estudio de esta situación analíticamente necesita un modelo matemático de nuestro sistema en forma de un conjunto de relaciones cuantitativas también de variables.

En este ejemplo ignoramos la respuesta dinámica del automóvil y solo consideramos el comportamiento. Además, asumimos el rango de velocidad que será usado por el sistema, podemos considerarlo una relación lineal, luego de medir la velocidad del vehículo en un camino nivelado a  $65 \text{ km/h}$ , encontramos que el cambio de un grado en el ángulo de apertura (nuestra variable de control) causa un cambio de  $10 \text{ km/h}$  en la

velocidad. Las observaciones realizadas mientras manejaba en la subida y bajada de una montaña, éstas arrojaron que cuando el grado de inclinación cambia en 1%, medimos un cambio de velocidad de 5 km/h. El medidor de velocidad operó con una exactitud de una fracción 1 km/h el cual era considerado muy exacto.

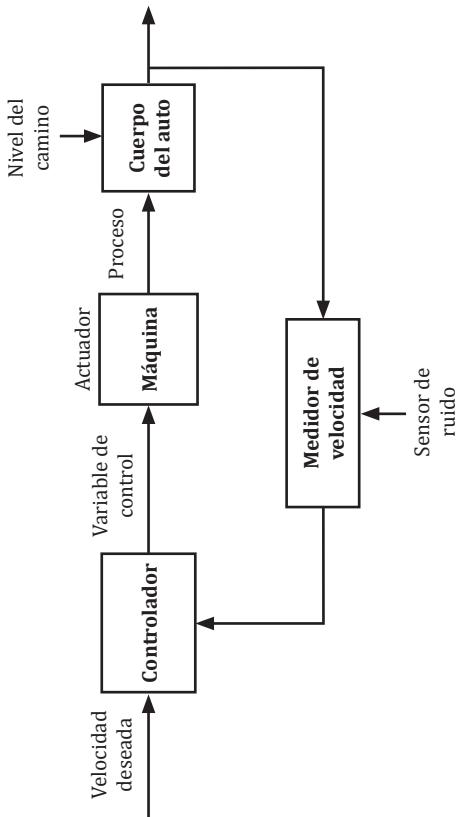


Fig. 7.2. Sistema de control de velocidad crucero en un automóvil.

Para concluir, quiero aclarar que algunos autores utilizan la palabra *retroalimentado* y algunos otros la palabra *realimentado*, como esta palabra viene de la traducción en inglés feedback, en ambos casos significan lo mismo.

## REFERENCIAS

1. D'azzo, John and Houpis, Constantine. **Linear Control System Analysis and Desing.** McGraw-Hill. 4ta. ed. New York, 1995.
2. Dorf, Richard and Bishop, Robert. **Sistemas de Control Moderno.** Pearson 10ma. ed. España, 2006.
3. Dorsey, John. **Sistemas de Control Continuos y Discretos.** McGraw-Hill. 1era. ed. México, 2003.
4. Kuo, Benjamin and Golnaraghi, Farid. **Automatic Control System.** Wyle and Sons. 8va. ed. New York, 2003.
5. Nise, Norman. **Control Systems Engineering, Wiley & Sons.** 4ta ed. California, 2007.
6. Ogata, Katsuhito. **Ingeniería de Control Moderna, Pearson.** 4ta. ed. España, 2002.
7. Phillips, Charles and Harbor, Royce. **Feedback Control Systems.** Prentice Hall. 3era. ed. 1996.
8. Valencia, Hernán. **Sistemas Automáticos de Control.** Serie Nabla Delta, Universidad Pontificia Bolivariana. 1997
9. Fongiel M. **Automatic Control System/Robotics.** Research and Education Association 1era. ed.



## **CAPÍTULO 2**

### **FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS**

#### ***La Transformada de Laplace***

#### ***Introducción***

Uno de los aspectos más importantes del análisis y diseño de los sistemas de control es su modelado, para ello es necesario el uso de los fundamentos matemáticos para el desarrollo de herramientas que faciliten el análisis y la solución de problemas en la teoría clásica de sistemas de control, la razón de esta afirmación estriba en el hecho de que el comportamiento de los sistemas físicos se describen mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, lo que conlleva al estudio detallado y profundo de las mismas para lograr un basamento matemático que garantice un nivel académico adecuado en los tópicos: teoría de variable compleja, la diferencial, ecuaciones diferenciales, la transformada de Laplace y la transformada  $z$ . Así mismo, en la actualidad la teoría de control moderno requiere considerablemente de un nivel matemático más intensivo, tales como la teoría de matrices, teoría de conjuntos, álgebra lineal, transformaciones lineales, programación, teoría de probabilidades y otros tópicos de matemática avanzada.

En este capítulo se presenta la teoría y aplicaciones de la transformada de la Laplace y recomendamos la revisión de los tópicos sobre variables complejas, ecuaciones diferenciales y el álgebra matricial. Estas asignaturas normalmente forman parte del ciclo básico de ingeniería con énfasis en las aplicaciones a los sistemas por lo que abordar estos temas en este texto haría muy extensa la obra sobre contenidos ya incluidos en el diseño

curricular de los estudios de ingeniería.

Los objetivos de este capítulo son:

1. Introducir los fundamentos de la transformada de Laplace.
2. Desarrollar aplicaciones de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.
3. Introducir el concepto de función de transferencia.
4. Usar la herramienta Matlab para la solución de problemas.

### ***La Transformada de Laplace***

La transformada de la Laplace es una de las herramientas matemáticas más usadas para resolver ecuaciones diferenciales. En comparación con los métodos clásicos de solución de ecuaciones diferenciales, el método de Laplace se basa en:

1. Las soluciones, tanto homogénea como particular de las ecuaciones diferenciales, se obtienen en una sola operación matemática.
2. La transformada de Laplace convierte la ecuación diferencial en ecuaciones algebraicas con el operador  $s$ , por lo que es posible manipular las mismas mediante las reglas básicas del álgebra para obtener la solución en el dominio de  $s$ . La solución final se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace.

### **Definición de la transformada de Laplace**

Sea  $f(t)$  una función continua en  $[0, \infty)$ . La transformada de Laplace de  $f(t)$  es la función  $F(s)$  definida mediante la integral:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1)$$

El dominio de  $F(s)$  está formado por todos los valores de  $s$  para los cuales la integral en (1) existe, la transformada de la Laplace se denota  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  o  $F(s)$ . Donde la variable  $s = \alpha + j\omega$  se define en el plano complejo.

### **Ejemplo 1**

Sea la función  $f(t)$  definida por:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases}$$

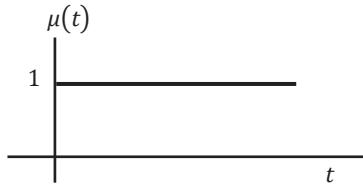


Fig. 8. Gráfica de la función escalón unitario.

Usando la definición de la transformada de Laplace para calcular:

$$f(s) = \int_0^{\infty} (1)e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{-1}{s} = \frac{1}{s}, \quad (2)$$

$$s > 0$$

Para valores de  $s < 0$ , la integral diverge y por tanto el dominio de  $F(s)$  es para  $s > 0$ .

### EJEMPLO 2

Determine la transformada de Laplace de  $f(t) = e^{at}$ ,  $t \geq 0$ , donde  $a > 0$  es una constante.

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^{\infty} (e^{at}) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a \end{aligned} \quad (3)$$

De este resultado podemos obtener las trasformadas de las siguientes funciones:

$$a) f(t) = e^{jat}, \quad b) f(t) = e^{-jat}$$

La transformada de la función  $e^{jat}$  usando el resultado en (3) obtenemos:

$$F(s) = \frac{1}{s - ja} \quad \text{y para la función } e^{-jat} \text{ usando el mismo}$$

resultado, obtenemos:

$F(s) = \frac{1}{s+ja}$ , para  $s > |ja|$  se obtienen los pares de transformadas siguientes:

$$e^{jat} \leftrightarrow \frac{1}{s-j a} \quad (4)$$

$$e^{-jat} \leftrightarrow \frac{1}{s+j a} \quad (5)$$

Si  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , operador matemático doble implicación  $\leftrightarrow$ , significa que va en dos sentidos, el primero indica que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \text{de igual manera el segundo indica}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t), \quad \text{siendo}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad \text{la transformada inversa de Laplace de } F(s).$$

## Propiedades de la transformada de Laplace

### a) Propiedad de linealidad

#### Teorema 1

Dada dos funciones  $f(t)$ ,  $g(t)$ , se requiere determinar la transformada de la suma de estas funciones, la propiedad de linealidad de la transformada define a la transformada de la suma de funciones como la suma de sus transformadas, ilustrada de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \mathcal{L}\{af(t)\} + \mathcal{L}\{bg(t)\} \\ &= bF(s) + bG(s) \end{aligned} \quad (6)$$

#### EJEMPLO 3

Determine la transformada de la función  $f(t) = \operatorname{sen}(at)$  para  $t \geq 0$ , donde  $a$  es una constante arbitraria.

Podemos comenzar estableciendo la relación de la función seno con las funciones exponenciales, usando la identidad de

Euler tenemos que  $\operatorname{sen}(bt) = \frac{e^{ibt} - e^{-jbt}}{2j}$ . Este resultado facilita el cálculo de la transformada de la función seno, debido que la transformada de las funciones exponenciales ya son conocidas usando (4) y (5), por lo cual es muy fácil hallar  $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}$  mediante la aplicación de la propiedad de linealidad de la transformada equivale a obtener:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j}\right\}: \\ f(t) = \frac{1}{2j} (e^{ibt} - e^{-jbt}) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - bj} - \frac{1}{s + bj} \right) \\ = \frac{1}{2j} \left( \frac{s + bj - s + bj}{s^2 + b^2} \right) = \frac{2bj}{2(s^2 + b^2)} = \frac{b}{s^2 + b^2} \end{aligned}$$

y podemos concluir que:

$$\operatorname{sen}(bt) \leftrightarrow \frac{b}{s^2 + b^2} \quad (7)$$

De manera análoga se puede determinar la transformada de la función  $f(t) = \cos(bt)$ , la cual se dejará como ejercicio al lector, donde obtendrá el siguiente resultado:

$$\cos(bt) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + b^2} \quad (8)$$

Una función  $f(t)$  es de orden exponencial  $\alpha$  si existen constantes positivas  $T$  y  $M$  tales que:

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad (9)$$

### Teorema 2

SI  $f(t)$  es continua por partes en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$ , entonces  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > \alpha$ .

Demostración:

Separamos primero la integral  $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$  en dos partes.

$$\int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (10)$$

y como  $t \geq T$  para  $s > \alpha$  entonces se puede aplicar la relación:

$$|f(t)e^{-st}| = e^{-st}|f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)t},$$

y se obtiene:

$$\int_T^\infty Me^{-(s-\alpha)t} dt = M \int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = Me^{-(s-\alpha)t} \frac{1}{s-\alpha} < \infty$$

Como  $|f(t)e^{-st}| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$  para  $t \geq T$ , la integral impropia de la función mayor converge para  $s > \alpha$ ; el criterio de comparación muestra que la integral

$$\int_T^\infty f(t)e^{-st} dt$$

converge para  $s > \alpha$ . Por último, como las dos integrales en (9) existen, la transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > \alpha$ .

### b) Propiedad de traslación en s

#### Teorema 3

Si la transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > a$  entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st} dt = f(s-a) \text{ para } s > a$$

Demostración:

De la definición se sabe que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t} dt = F(s-a)$$

la cual es válida para  $s > a$ .

#### EJEMPLO 4

Determinar la transformada de Laplace de  $f(t) = e^{-at} \sin(bt)$ .

En el Ejemplo 3 vimos que  $\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2}$ , así que por

la propiedad de traslación de  $F(s)$ , tenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \operatorname{sen}(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad (11)$$

### c) Transformada de Laplace de la derivada

#### *Teorema 4*

Sea  $f(t)$  una función continua diferenciable en el intervalo  $[0, \infty)$ ; entonces la transformada de Laplace de la función derivada de  $f(t)$  viene dada por:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (12)$$

Podemos usar inducción para extender el teorema a derivadas de orden superior:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (13)$$

y en general obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^n(t)\} &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \\ &\quad - s^{n-3}f''(0) - \dots - f^{n-1}(0) \end{aligned} \quad (14)$$

Esta propiedad es muy útil para encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, lo cual abordaremos más adelante cuando estudiemos las aplicaciones de la transformada de Laplace, por ahora la usaremos para encontrar las transformadas de funciones conocidas.

#### EJEMPLO 5

Sea la función  $f(t) = \operatorname{sen}(bt)$ . Si  $f'(t) = b\cos(bt)$  y  $f(0) = 0$ , halle la transformada de la función  $f(t) = \cos bt$ .

Sustituyendo en la ecuación (12) obtenemos:

$$\mathcal{L}\{b \cos bt\} = sF(s) - 0$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}\{b \cos bt\} = s \frac{b}{s^2 + b^2}$$

y en consecuencia

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

#### d) Propiedad de multiplicación por $t^n$

##### *Teorema 5*

Sea una función  $f(t)$  seccionalmente continua y diferenciable en el intervalo  $[0, \infty)$ ; entonces su transformada de Laplace es también diferenciable y por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (15)$$

La demostración de este teorema es muy sencilla, bastará con derivar la función  $F(s)$  usando la definición de la transformada de Laplace e intercambiando el orden de integración y derivación.

##### EJEMPLO 6

$$\text{Sea } f(t) = t\mu(t) \text{ donde } \mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La transformada de esta función la calculamos en el Ejemplo 1, y es:

$$\mu(t) = \frac{1}{s};$$

ahora bien, para calcular la transformada de la función  $f(t)$ , debemos aplicar la propiedad de multiplicación por  $t$ , esto implica que:

$$F(s) = -\frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds} = \frac{1}{s^2},$$

y de acuerdo con este resultado podemos concluir que la transformada de:

$$f(t) = t \text{ para } t \geq 0 \text{ es } f(s) = \frac{1}{s^2}.$$

**EJEMPLO 7**

Podemos calcular las transformadas de  $f(t) = t^2$  y  $x(t) = t^3$ , para  $t \geq 0$ , usando la propiedad de multiplicación por  $t$ , y encontramos que:

$$F(s) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{2}{s^3} \quad \text{y} \quad X(s) = (-1)^2 \frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{6}{s^4}$$

Si ahora hacemos  $f(t) = t^n$  para  $t \geq 0$ , se obtiene, por lo cual concluimos que:

$$t^n \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (16)$$

**e) Propiedad de desplazamiento en el tiempo***Teorema 6*

Sea  $f(t)$  una función seccionalmente continua y existe su transformada. Entonces la transformada de  $f(t - \tau)$  para  $t \geq \tau$  está dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = F(s)e^{-s\tau} \quad (17)$$

Demostración:

Por definición.

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = \int_0^\infty f(t - \tau)e^{-st}dt$$

Si hacemos  $u = t - \tau$ ,  $t = u + \tau$ , entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t - \tau)\} &= \int_0^\infty f(u)e^{-(u+\tau)s}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-su}e^{-s\tau}du \\ &= e^{-s\tau} \int_0^\infty f(u)e^{-su}du = e^{-s\tau}f(s) \end{aligned}$$

**EJEMPLO 8**

Determinar la transformada de la función  $x(t) = \sin(t - 5)$  para  $t \geq 5$ .

Como conocemos la transformada de  $\sin t$ , es  $\frac{1}{s^2 + 1}$ , aplicamos la propiedad de desplazamiento y obtenemos:

$$\mathcal{L}\{\sin(t - 5)\} = \frac{1}{s^2 + 1} e^{-5s}$$

**f) Transformada de la integral***Teorema 7*

Sea  $f(t)$  una función seccionalmente continua en el intervalo  $[0, \infty)$ , y cuya transformada es  $F(s)$ . Entonces,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \int_{-\infty}^t f(t)dt, \quad (18)$$

pero la función es cero si  $t < 0$  y se tiene que:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (19)$$

Demostración:

$$\text{Sea } \frac{dg}{dt} = f(t).$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \text{ y en consecuencia:}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = sG(s) - g(0), \quad \text{donde}$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad \text{y} \quad g(t) \equiv \int_{-\infty}^t f(t)dt, \quad \text{con}$$

$$g(0) = \int_{-\infty}^0 f(t)dt.$$

Sustituyendo nos queda:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = s \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t f(t)dt\right\} - \int_{-\infty}^t f(t)dt$$

Despejando se obtiene:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \int_{-\infty}^t f(t)dt$$

### EJEMPLO 9

Determine la transformada de la función:

$$f(t) = \int_0^t e^{-2t} \sin(5t) dt.$$

Buscamos primero la transformada del argumento:

$$e^{-2t} \sin(5t), \frac{5}{(s+2)^2 + 25}$$

y aplicamos la propiedad de la integral, para determinar la transformada de  $f(t)$ , se obtiene:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{\frac{5}{(s+2)^2 + 25}}{s} = \frac{5}{s[(s+2)^2 + 25]}$$

### g) Propiedad de escalamiento en el tiempo

#### *Teorema 8*

Una función está escalada en el tiempo y está definida por  $f(at)$  de tal manera que su transformada.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(at)e^{-st} dt$$

viene dada por:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Demostración:

Sabemos que:

$$\int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt$$

Haciendo un cambio de variables.

$$u = at, \quad t = \frac{u}{a}, \quad du = adt \Rightarrow \frac{du}{a} = dt$$

y sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(u) e^{-s\frac{u}{a}} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

### EJEMPLO 10

Determine la transformada de la función  $x(at) = (at)^2$ .

Como conocemos la transformada de la función

$$f(t) = t \leftrightarrow \frac{2}{s^3}, \quad \text{aplicamos la propiedad del Ejemplo 7 y}$$

obtenemos:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a} \frac{2}{\left(\frac{s}{a}\right)^3} = \frac{2}{s^3} = \frac{2a^2}{s^3}$$

### h) Teorema del valor inicial

#### *Teorema 9*

Sea  $f(t)$  una función seccionalmente continua en el intervalo  $[0, \infty)$  y cuya transformada  $F(s)$  existe. Entonces podemos conocer su condición inicial en  $t = 0$  mediante la propiedad:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) = f(0) \quad (20)$$

Demostración:

Sabemos que:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = -f(0) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

por lo que,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)],$$

pero

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = 0$$

y nos queda:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0)$$

### EJEMPLO 11

Suponga que la función  $x(t)$  tiene la transformada:

$$X(s) = \frac{-3s^2 + 2}{s^3 + s^2 + 3s + 2}$$

Determine  $x(0)$

Aplicando el teorema de valor final nos queda:

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-3s^3 + 2s}{s^3 + s^2 + 3s + 2} = \frac{-3}{1} = -3$$

### i) Teorema del valor final

#### *Teorema 10*

Sea una  $f(t)$  función seccionalmente continua en el intervalo  $[0, \infty)$  con transformada  $F(s)$ . Entonces podemos conocer  $f(\infty)$  por la relación:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \tag{21}$$

Demostración:

Sabemos que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

y también que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt &= \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] \end{aligned}$$

por lo que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(\infty)$$

### EJEMPLO 12

Determinar el valor final e inicial de la función  $x(t) = 4e^{-5t} - 3e^{-2t}$ .

$$X(s) = \frac{4}{s+5} - \frac{3}{s+2} = \frac{s-7}{s^2+7s+14}$$

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - 7s}{s^2 + 7s + 14} = 1$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 7s}{s^2 + 7s + 14} = 0$$

### Ejemplo 13

Suponga que  $X(s)$  es una función racional dada. Halle  $x(\infty)$ .

$$X(s) = \frac{2s^2 - 3s + 4}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{2s^2 - 3s + 4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2s^2 - 3s + 4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(2s^2 - 3s + 4)}{s(s+1)(s+2)} = 2$$

### Resumen de Transformadas

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$1, \quad t \geq 0$	$\frac{1}{s}, s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s - b)^2 + b^2}$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$
$f(t - \tau)$	$e^{-s\tau} F(s)$
$\int f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F(s/a)$

## Transformada inversa de Laplace

En la sección anterior definimos a la transformada de Laplace como un operador integral que asocia a cada función  $f(t)$  con una función  $F(s)$ . En esta sección pretendemos encontrar  $f(t)$ , cuando conocemos la transformada  $F(s)$ , es decir, queremos hallar la transformada inversa de Laplace.

### Definición de transformada inversa de Laplace

Sea una función  $F(s)$ . Si existe una función  $f(t)$  que sea secionalmente continua en el intervalo  $[0, \infty)$  y satisfaga la relación:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (22)$$

entonces  $f(t)$  es la transformada inversa de Laplace de  $F(s)$ .

#### EJEMPLO 14

Determinar la transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ , donde:

$$\text{i)} F(s) = \frac{6}{s^4}$$

$$\text{ii)} F(s) = \frac{6}{(s-2)^2 + 36}$$

$$\text{iii)} F(s) = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 5}$$

Para calcular la transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ , usaremos la tabla de transformadas y las propiedades de la transformada estudiadas en la sección anterior.

$$\text{i)} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = t^3$$

$$\text{ii)} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s-2)^2 + 36}\right] = e^{2t} \operatorname{sen}(6t)$$

$$\text{iii) } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right] = e^t \cos(2t)$$

En la práctica no siempre es fácil encontrar una transformada inversa que aparezca en la tabla de transformadas de Laplace; para funciones más complejas usaremos las propiedades de  $\mathcal{L}^{-1}$  así como también las propiedades de la transformada de Laplace ( $\mathcal{L}$ ). Una de las herramientas más útiles es la propiedad de la linealidad, la misma es heredada de la linealidad de la transformada de Laplace y se enuncia a continuación.

### *Teorema 11*

Sean  $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]$  y  $\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$  funciones que existen y son continuas en el intervalo  $[0, \infty)$ , entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] \quad (23)$$

### EJEMPLO 15

Determinar la transformada inversa de Laplace de:

$$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-3} + \frac{2s}{s^2+4} + \frac{10}{3s^2+6s+9}\right\}$$

Primero aplicamos la propiedad de linealidad:

$$f(t) = 4 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{10}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+3}\right\}$$

De la tabla de transformadas de Laplace obtenemos que:

$$4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 4e^{3t}, \text{ y } 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = 2\cos 2t$$

Ahora bien, para calcular:

$$\left(\frac{10}{3}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \right]$$

es necesario hacer algunas manipulaciones para llevarla a una expresión que aparezca en la tabla, para ello completamos cuadrados en el denominador para obtener  $s^2 + 2s + 3 = (s + 1)^2 + 2$  y luego sustituyendo en la transformada nos queda:

$$\left(\frac{10}{3\sqrt{2}}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2 + 2} \right]$$

Si la ubicamos en la tabla de transformadas, de donde obtenemos el siguiente resultado  $\frac{10}{3\sqrt{2}} e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)$ .

Por lo tanto, la solución total es:

$$f(t) = 4e^{3t} + 2\cos(2t) + \frac{10}{3\sqrt{2}} e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)$$

Ahora bien, si usted tuviese la oportunidad de hallar la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{5s + 3}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

o de:

$$F(s) = -\frac{2}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{7}{2} \frac{1}{s+2} - \frac{17}{6} \frac{1}{s+4}$$

que es igual a la anterior, por supuesto, es mucho más fácil encontrar la solución de la segunda función, pues esta expresión está en una forma que permite usar el método de fracciones parciales. Estudiaremos este método a continuación.

### Método de fracciones parciales

Este método consiste en expresar una función  $F(s)$  de la forma  $P(s)/Q(s)$  (función racional), donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios de grado menor o igual que el de  $Q(s)$ .

mios en  $s$ , y donde el grado de  $P(s)$  es menor que el grado de  $Q(s)$ , por lo cual tienen un desarrollo en fracciones parciales cuya forma está compuesta por factores lineales y cuadráticos de  $Q(s)$ . Debemos considerar tres casos:

1. Raíces reales diferentes.
2. Raíces reales repetidas.
3. Raíces complejas o factores cuadráticos.

### 1. Raíces reales diferentes

Si podemos expresar  $Q(s)$  en factores lineales distintos (factorización de polinomios) de la forma:

$$Q(s) = (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)$$

donde los valores  $r_i, i = 1, 2, \dots, n$  son números reales, podemos representar la función en fracciones parciales como:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \dots + \frac{A_n}{s - r_n}$$

donde las constantes  $A_i, i = 1, 2, \dots, n$  son números reales.

#### EJEMPLO 16

Determinar la transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]$ , si

$$F(s) = \frac{5s + 3}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

la cual podemos expresar de la siguiente manera:

$$F(s) = \frac{5s + 3}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 4}$$

Hay muchas formas para encontrar estas constantes, para nuestro caso las determinaremos considerando a  $A, B, C$  constantes o residuos de  $F(s)$  y se calculan multiplicando ambos lados de la ecuación por  $(s - s_n)$  siendo  $s_n$  la raíz de  $s$  que le corresponde a cada constante y se le asigna el valor de  $s_n$  a  $s$ , es decir,  $(s + 1) F(s)|_{s=1} = A$ , como se muestra a continuación:

$$A = \frac{5s + 3}{(s+2)(s+4)} \Big|_{s=-1} = \frac{-2}{3}$$

$$B = \frac{5s + 3}{(s+1)(s+4)} \Big|_{s=-2} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

$$C = \frac{5s + 3}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-4} \quad C = -\frac{17}{6}$$

Por lo tanto,

$$F(s) = \frac{5s + 3}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

$$F(s) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{17}{6} \cdot \frac{1}{s+4}$$

Por último, la transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]$  es:

$$f(t) = -\frac{2}{3} e^{-t} + \frac{7}{2} e^{-2t} - \frac{17}{6} e^{-4t}, \text{ para } t > 0$$

## 2. Raíces reales repetidas

Sea  $(s - r_1)$  un factor lineal repetido de  $Q(s)$  y supongamos que  $(s - r_1)^m$  es la máxima potencia de  $Q(s)$ . Entonces la parte del desarrollo en fracciones parciales de:

$\frac{P(s)}{Q(s)}$  corresponde al término  $(s - r_1)^m$ , es:

$$\frac{A_1}{(s - r_1)} + \frac{A_2}{(s - r_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - r_1)^n},$$

donde los  $A_i$  son números reales.

### EJEMPLO 17

Determinar la transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]$ , si,

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 2}{s^3 + s^2 - 5s + 3}$$

Ésta la podemos expresar en la forma:

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 2}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s+3)}$$

Para encontrar las constantes usamos el mismo método anterior, pero con una variante que explicaremos en el desarrollo del ejemplo.

Para encontrar  $A$  se procede de manera análoga al ejercicio anterior:

$$A = \left. \frac{s^2 + 9s + 2}{(s+3)} \right|_{s=1} = \frac{12}{4} = 3$$

Para el caso de la constante debemos de aplicar la fórmula siguiente:

$$A_{1k} = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1} A(s)}{ds^k} \right|_{s=r_1} \quad (24)$$

Si aplicamos esta relación para encontrar  $B$ , tenemos que:

$$B = \frac{1}{(1-1)!} \left. \frac{d \left( \frac{s^2 + 9s + 2}{s+3} \right)}{ds} \right|_{s=1}$$

$$= \frac{(2s+9)(s+3) - [s^2 + 9s + 2]}{(s+3)^2} \Big|_{s=1}$$

$$= \frac{44 - 12}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

y

$$C = \frac{s^2 + 9s + 2}{(s-1)^2} \Big|_{s=-3} = -\frac{16}{16} = -1$$

Obtenemos entonces el resultado para la transformada inversa como:

$$f(t) = 3te^t + 2e^t - e^{-3t}$$

### 3. Factores cuadráticos con raíces complejas

Para este caso podemos expresar a  $Q(s)$  en factores cuadráticos o en factores con raíces complejas de la forma:

$$Q(s) = (s - \alpha + bj)(s - \alpha - bj) \quad \text{o} \quad Q(s) = [(s - \alpha)^2 + \beta^2]$$

Hay dos formas de encontrar la solución en este caso; primero resolveremos usando las raíces complejas y luego usaremos el método por factores cuadráticos y el lector escogerá el que más le agrade.

Para resolver por el método de las raíces complejas, se procede de la siguiente manera: Si  $s_1 = p_1 = \sigma + \omega j$ , donde  $p_2 = \bar{p}_1$  es el complejo conjugado de  $p_1$ .

Entonces,

$$F(s) = \frac{C_1}{(s - p_1)} + \frac{\bar{C}_1}{(s - \bar{p}_1)}$$

y la solución buscada será  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ , es decir,

$$f(t) = C_1 e^{-p_1 t} + \bar{C}_1 e^{-\bar{p}_1 t}$$

la cual se puede expresar también como:

$$f(t) = 2|C_1| e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \angle C_1) \quad (25)$$

donde

$$C_1 = (s - p_1) f(s) \Big|_{s=p_1}$$

Por el contrario, si queremos resolver por el método de factores cuadráticos, se procede de la siguiente forma:

Se factoriza  $Q(s)$  usando completación de cuadrados de la forma  $(s - \alpha)^2 + \beta^2$ .

Luego se construye la fracción parcial de la forma,

$$f(s) = \frac{A(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{B(\beta)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (26)$$

donde los valores de  $A$  y  $B$  se determinan por el álgebra básica.

La trasformada inversa es:

$$f(t) = A e^{\alpha t} \cos(\beta t) + B e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)$$

### EJEMPLO 18

Determine la transformada inversa de Laplace de la función.

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 + 3s^2 + 4s + 2}$$

Primero procederemos por el método de raíces complejas:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2 - 2s + 1}{(s + 1 - j)(s + 1 + j)(s + 1)} \\ &= \frac{A}{(s + 1 - j)} + \frac{\bar{A}}{(s + 1 + j)} + \frac{B}{(s + 1)} \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de  $A$  hacemos el procedimiento antes explicado en el método de expansión en fracciones parciales.

$$A = \left. \frac{s^2 - 2s + 1}{(s + 1 + j)(s + 1)} \right|_{s=-1+j} = \frac{-3}{2} + 2j$$

$$|A| = \frac{5}{2} \text{ y } \angle A = 180 + \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = 126.87^\circ$$

$$B = \frac{s^2 - 2s + 1}{(s^2 + 2s + 2)} \Bigg|_{s=-1} = 4$$

La solución completa es:

$$f(t) = 5e^{-t} \cos(t + 126.87^\circ) + 4e^{-t} \text{ para } t \geq 0$$

Usando el procedimiento de factores cuadráticos resolvemos factorizando  $Q(s)$  para obtener  $Q(s) = [(s+1)^2 + 1](s+1)$  y entonces,

$$F(s) = \frac{A(s+1)}{(s+1)^2 + 1} + \frac{B}{(s+1)^2 + 1} + \frac{C}{(s+1)}$$

Resolviendo por álgebra básica nos queda:

$$(s^2 - 2s + 1) = A(s+1)^2 + B(s+1) + C(s^2 + 2s + 2)$$

$$C = \frac{s^2 - 2s + 1}{(s^2 + 2s + 2)} \Bigg|_{s=-1} = 4$$

$$-3 = A$$

$$-10 = 6 + B \Rightarrow B = -4$$

y la transformada inversa de  $F(s)$  es:

$$f(t) = -3e^{-t} \cos t - 4e^{-t} \sin t + 4e^{-t} = 5e^{-t} \cos(t + 126.87^\circ)$$

### **Aplicaciones de la Transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales**

#### **EJEMPLO 19**

Resuelva la siguiente ecuación diferencial con los valores iniciales dados.

$$y'' + 2y' + 2y = t, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

**Primer paso:** se aplica la transformada a ambos lados de la ecuación diferencial.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)[s^2 + 2s + 2] = s + 3 + \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 3s + 1}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

**Segundo paso:** se busca  $Y(s)$  usando el método de fracciones parciales; esto se deja como ejercicio al lector. Se obtiene:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3}{2} \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 1} + 2 \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s^2} \right) \end{aligned}$$

**Tercer paso:** se determina la transformada inversa de  $Y(s)$  para obtener  $y(t)$ .

$$y(t) = \frac{3}{2} e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t$$

### Convolución de funciones

#### Teorema 12

Sea dos funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  seccionalmente continuas en  $[0, \infty)$ . La convolución de las funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  se denota como:

$$f(t)^* g(t) = \int_0^t f(u) g(t-u) du \tag{27}$$

#### Propiedades

- a.  $f(t)^* g(t) = g(t)^* f(t)$
- b.  $f(t)^* [g(t) + h(t)] = f(t)^* g(t) + f(t)^* h(t)$
- c.  $[f(t)^* g(t)]^* h(t) = f(t)^* [g(t)^* h(t)]$
- d.  $f(t)^* 0 = 0$

## EJEMPLO 20

Sean  $f(t) = t$  y  $g(t) = t^2$  funciones continuas en el intervalo  $[0, \infty)$ . Determine la convolución  $f(t)^* g(t)$ .

$$\begin{aligned} f(t)^* g(t) &= \int_0^t u(t-u)^2 du = \int_0^t u(t^2 - 2ut + u^2) du \\ &= \int_0^t (ut^2 - 2u^2t + u^3) du = \left( \frac{t^2u^2}{2} - \frac{2}{3}u^3t + \frac{u^4}{4} \right) \Big|_0^t \\ &= \frac{t^4}{2} - \frac{2}{3}t^4 + \frac{t^4}{4} = \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) t^4 = \frac{1}{12} t^4 \end{aligned}$$

## EJEMPLO 21

$$\text{Hallar } \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right].$$

Tenemos que:

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s^2+1)} \cdot \frac{1}{(s^2+1)}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s^2+1)} \cdot \frac{1}{(s^2+1)} \right] &= \text{sen } t * \text{sen } t \\ &= \int_0^t \text{sen}(u) \text{sen}(t-u) du \\ &= \frac{\text{sen } t - t \cos t}{2} \end{aligned}$$

Se deja la comprobación del resultado al lector usando la transformada inversa y propiedades de la transformada de Laplace.

### **Transformada de la función delta de Dirac**

Un concepto importante en la teoría de sistemas es la función impulso o también llamada delta de Dirac, se representa como  $\delta(t)$  definida así:

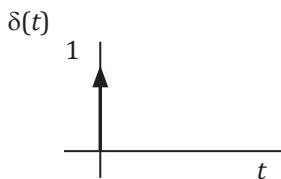


Fig. 9. Gráfica de la función Delta de Dirac.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \quad \therefore \varepsilon \rightarrow 0 \\ 0 & t > \varepsilon, t < -\varepsilon \end{cases}$$

La función impulso o delta es muy importante en la ciencia e ingeniería, el comportamiento de un sistema puede describirse si lo perturbamos de manera abrupta cuando está en reposo, esta perturbación significa inyectarle una cantidad finita de energía en un lapso de tiempo muy corto, un ejemplo práctico es, cuando la raqueta de un tenista golpea la pelota.

Existen varias maneras de representar el impulso, la representación con más analogía física de la cual se deriva, es la que se muestra en la Figura n° 9.

Ahora bien, la transformada de Laplace de la función impulso o delta de Dirac es:

$$(28) \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^t \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

Demostración:

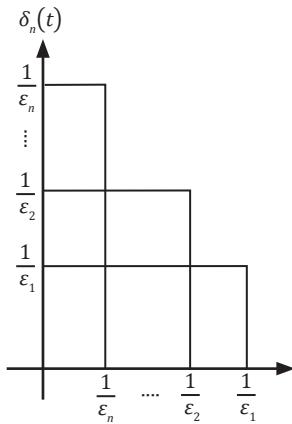


Fig. 10. Aproximación de la función impulso.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_0^t \delta(t)e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{-st}}{\varepsilon} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{\varepsilon s} e^{-st} \right|_0^t \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-st}}{\varepsilon s} \end{aligned}$$

El cálculo del límite indeterminado  $\frac{0}{0}$  se puede resolver aplicando la regla de L'Hopital derivando el numerador y el denominador con respecto a  $\varepsilon$ .

Nos queda:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\frac{d(1 - e^{-\varepsilon s})}{d\varepsilon}}{\frac{d(\varepsilon s)}{d\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{s e^{-\varepsilon s}}{s} = 1$$

De esta prueba se deduce:

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-ts_0} \quad (29)$$

Esta conclusión se demuestra usando la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Laplace, explí-

cada con anterioridad.

### **Desarrollo de fracciones parciales usando Matlab**

Para ello utilizaremos el comando RESIDUE( $n, m$ ), si tenemos una función racional  $Y(s)$  donde se puede aplicar algún caso del método de fracciones parciales, el desarrollo de

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

donde el grado del polinomio  $Q(s)$  es mayor o igual que el grado del polinomio:

$$P(s) \text{ y } Y(s) = \frac{r(1)}{s - p_1} + \frac{r(2)}{s - p_2} + \dots + \frac{r(n)}{s - p_n} + k,$$

donde las  $r$  son las constantes,

$$Y(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)\dots(s - p_n),$$

y  $k$  representa el residuo de la división de polinomios.

#### EJEMPLO 22

Sea

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3} = \frac{A}{(s + 1)} + \frac{B}{(s + 1)^2} + \frac{C}{(s + 1)^3}.$$

Podemos expresar

$Y(s)$  de la forma:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

```
>>num=[0 1 2 3];
>>dem=[1 3 3 1];
>>[r,p,k]=residue(num,den)
```

Corrida

$r =$

1.000

0.000

2.000

p=

-1.000

-1.000

-1.000

k=

0.000

Este resultado representa la transformada:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

Adicionamos el comando `printsys(m, n, 's')` para escribir la ecuación:

```
>> printsys(num,den,'s')
```

El resultado de la corrida es:

$$\text{Num/dem} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

## PROBLEMAS

1. Determine la transformada de Laplace de las funciones siguientes:

1.1  $f(t) = 4\cos(3t)e^{-4t}$

1.2  $f(t) = 5\cos(3t)e^{-t} + t^2 \cos(5t)$

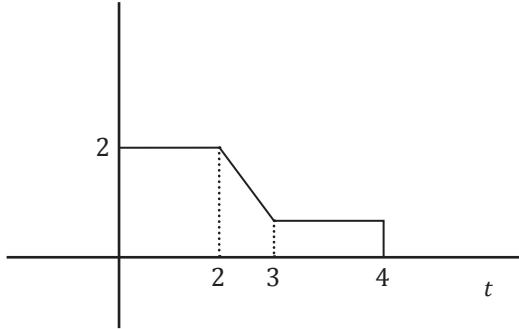
1.3  $f(t) = t^3 e^{-t} \sin(2t)$

1.4  $f(t) = (t - 4)e^{t-4} \mu(t - 4)$

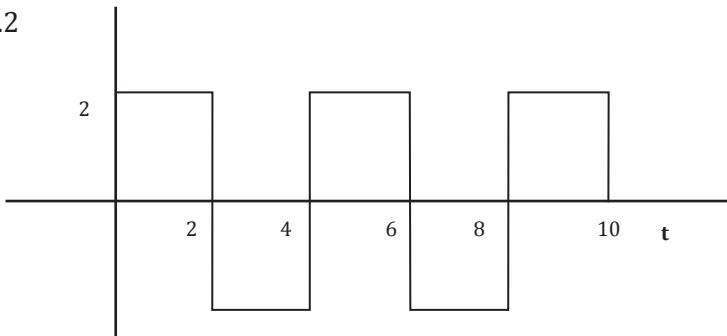
1.5  $f(t) = \cos(2t) - 4 \sin(5t)$

2. Determine la transformada de Laplace de las funciones mostradas en las gráficas.

2.1



2.2



3. Determine la transformada inversa de las siguientes funciones por el método de fracciones parciales.

$$3.1 \quad F(s) = \frac{4s - 5}{s^3 + 5s^2 + 4s}$$

$$3.2 \quad F(s) = \frac{5s^2 + 3s + 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

$$3.3 \quad F(s) = \frac{14s + 3}{s^4 + 8s^3 + 14s^2 + 12s}$$

$$3.4 \quad F(s) = \frac{8(s+2)^2}{s(s^2 + 10s + 20)}$$

$$3.5 \quad F(s) = \frac{2(s^2 + s + 1)}{s\left(s + \frac{3}{2}\right)(s^2 + 5s + 5)}$$

$$3.6 \quad F(s) = \frac{2(s+2)}{s(s^2 + s + 2)}$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando transformada de Laplace.

$$4.1 \quad y'' + 4y' + 5y = 8\cos t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$4.2 \quad 5y'' + 3y' + 2y = 8, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$$

$$4.3 \quad x''' + 3x'' + x' + 3x = 4 \quad x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = 5$$

$$4.4 \quad x''' + 2x'' + 5x' + 6x = 3f(t) + 2 \frac{df(t)}{dt} \text{ donde } f(t) = t^2 \\ x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0) = 0$$

$$4.5 \quad 2x'' + 12x' + 10x = 6\cos(4t) \quad x(0) = 1, x'(0) = 8$$

5. Determine la transformada inversa de las siguientes funciones usando el teorema de convolución de funciones.

$$5.1 \quad F(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$$

$$5.2 \quad F(s) = \frac{2s}{(s^2 + 4)}$$

$$5.3 \quad F(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

$$5.4 \quad F(s) = \frac{10s}{s^3 + 2s^2 + 4s + 8}$$

## REFERENCIAS

1. D'azzo, Jhon and Houpis, Constantine. **Linear control System analysis and Desing**. McGraw-Hill. 4ta. ed. New York, 1995.
2. Dorf, Richard and Bishop, Robert. **Sistemas de control moderno**. Pearson 10ma. ed. España, 2006.
3. Dorsey, John. **Sistemas de control continuos y discretos**, McGraw-Hill. 1era. ed. México, 2003.
4. Edwards and Penny. **Ecuaciones Diferenciales**. Prentice Hall, 4ta. ed. 2001.
5. Groosman, Stanley and Derrick, William. **Advanced Engineering Mathematics**. Harper and Row, 1ed. 1988.
6. Kamen, Edgard. **Introducción to Signal and System**. Prentice Hall. 2da. ed. New York, 1990.
7. Kuo, Benjamin and Golnaraghi, Farid. **Automatic Control System**. Wyle and Sons. 8va. ed. New York, 2003.
8. Neagle Kent, Saff, Edgard y Snider, Arthur. **Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores de Frontera**. Addison Wesley. 4ta. ed. 2005.
9. Nise, Norma. **Control Systems Engineering**, Wiley & Sons. 4ta. ed. California, 2007.
10. Ogata, Katsuhito. **Ingeniería de Control Moderna**. Pearson 4ta. ed. España, 2002.
11. Phillips, Charles and Harbor, Royce. **Feedback control systems**. Prentice Hall. 3era. ed. 1996.
12. Roberts, M. J. **Señales y Sistemas**. McGraw-Hill, 1era. ed. 2004.
13. Valencia, Hernán. **Sistemas automáticos de control**. Serie Nabla Delta, Universidad Pontificia Bolivariana, 1997.
14. Fongiel M. **Automatic Control system/Robotics, Research and education association**. 1era. ed. 2000.
15. Zill, Dennis y Cullen, Michael. **Ecuaciones Diferenciales con valores de frontera**. Thompson Learning, 5ta. ed. 2002.

## CAPÍTULO 3

### LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA *Gráficos de flujo de señal y diagramas de bloques*

#### **Introducción**

En la teoría de control muy frecuentemente se usan las funciones de transferencia para describir las relaciones entre la entrada y la salida de componentes o de sistemas que se modelan por medio de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo; se comenzará por definir la función de transferencia, para luego calcular la función de transferencia de sistemas representados en diagramas de bloques y en espacios de estado.

#### **Definición de función de transferencia**

La función de transferencia se define como el cociente de la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta del sistema) y la transformada de Laplace de la entrada (función excitación), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero, es decir, se considera que el sistema bajo estudio está en reposo.

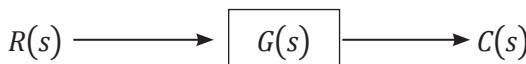


Figura 11. Representación de la ganancia de un sistema

Para el sistema ilustrado en la Figura n° 11, la salida  $R(s)$  es el producto de la ganancia  $G(s)$  y la entrada  $R(s)$ , lo que implica que  $C(s) = R(s) G(s)$ ; la ganancia del sistema es entonces  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ ; para sistemas descritos por ecuaciones diferenciales li-

neales e invariantes en el tiempo, tal como:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \dots + a_1 y' + a_0 y =$$

$$b_n x^{(m)} + b_{n-1} x^{m-1} + b_{n-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x' + b_0 x$$

la ganancia viene dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (30)$$

Para el análisis de los sistemas de control usaremos el modelo a lazo cerrado, el cual nos servirá para el cálculo y representación de cualquier sistema expresándolo en la forma ilustrada en la Figura n° 12, cabe destacar que la definición de  $G(s)$  se han considerado para sistemas en reposo, lo que traduce que las condiciones iniciales son cero.

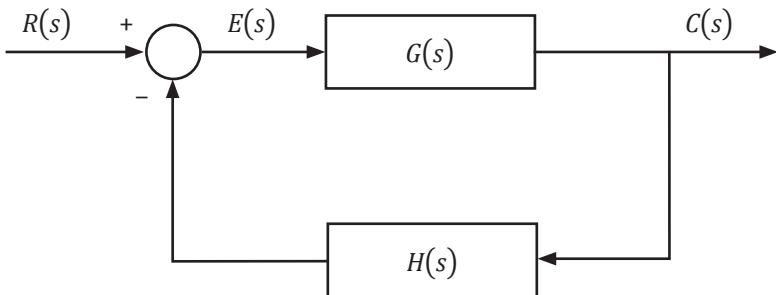


Fig. 12. Modelo de sistemas de control a lazo cerrado.

A continuación analizamos el diagrama de bloques del sistema mostrado en la Figura n° 12; utilizando la definición anterior de ganancia, obtenemos a:

$$C(s) = G(s) E(s) \quad \text{y} \quad E(s) = R(s) - C(s) H(s),$$

y si ahora combinamos las ecuaciones despejando  $C(s)$  de la segunda y sustituyéndola en la primera para determinar la ganancia total del sistema,

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)},$$

obtenemos que:

$$C(s) = G(s)[R(s) - C(s)H(s)];$$

así mismo operamos y obtenemos,

$$C(s) = G(s)R(s) - C(s)G(s)H(s),$$

y finalmente despejamos a  $C(s)$  lo que nos da:

$$C(s) + C(s)G(s)H(s) = G(s)R(s),$$

luego,

$$C(s) = \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)H(s)},$$

para obtener finalmente:

$$G_T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}, \quad (31)$$

donde la *ecuación característica* está definida por:

$$1 + G(s)H(s) = f(0) = 0, \quad (32)$$

y la cual nos será muy útil para estudiar la estabilidad de los sistemas.

Estas ecuaciones representan el modelo matemático a utilizar en el análisis del comportamiento y la estabilidad de sistemas de control de lazo cerrado que puedan reducirse a este modelo. Es importante hacer notar que el procedimiento seguido para encontrar la ganancia del sistema, no es el más efectivo; sin embargo, se utilizó por razones de sencillez y de ilustración. Más adelante en este capítulo mostraremos algunos métodos más efectivos para sistemas más complejos.

## Propiedades de la función de transferencia

Las propiedades de la función de transferencia quedan resumidas de la siguiente manera:

- La función de transferencia está definida sólo para sistemas lineales invariantes en el tiempo, no está definida para sistemas no lineales.
- La función de transferencia es independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.
- Todas las condiciones iniciales son cero.
- La función de transferencia de sistemas continuos es expresada sólo como una función de la variable compleja  $s$ , para el caso discreto los sistemas son modelados por ecuaciones de diferencias y la función de transferencia es una función de  $z$ , donde la transformada  $Z$  es la usada para este caso.
- Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se estudia la salida o respuesta para varias formas de entradas con la intención de conocer las características del sistema.

Volvamos a la definición de función de transferencia de ecuaciones diferenciales invariantes en el tiempo mostrada en la ecuación (30), ésta se denomina *estrictamente propia* debido a que  $n > m$ , implica que el grado del polinomio del denominador debe ser mayor al grado del polinomio del numerador.

## Función de transferencia de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas

La definición de la función de transferencia se puede extender a sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas, definiendo en este caso una matriz de ganancias. Para ilustrar esto mostramos el siguiente caso: sea el sistema definido por dos entradas y dos salidas mediante las ecuaciones:

$$Y_1(s) = G_{11}(s) R_1(s) + G_{12}(s) R_2(s) \quad (33)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s) R_1(s) + G_{22}(s) R_2(s) \quad (34)$$

La salida del sistema queda representada por el vector:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix},$$

la entrada por el vector:

$$R(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix},$$

y la matriz de Ganancia se define entonces por:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix},$$

Generalizando para el caso de  $m$  entradas y  $n$  salidas, se obtiene que la matriz de ganancia queda definida por:

$$G_{nm}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) & \dots & G_{1m} \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) & \dots & G_{2m} \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) & \dots & G_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & G_{n3}(s) & \dots & G_{nm} \end{bmatrix} \quad (35)$$

### **Diagrama de bloques de un sistema**

Un sistema de control puede estar constituido por varios componentes, el diagrama de bloque es la representación gráfica en bloque funcional de las funciones que representan a cada componente que conforma el sistema, los diagramas muestran las relaciones existentes entre estos diversos componentes. Así mismo, es importante destacar que la representación del sistema es realizado mediante el uso de figuras geométricas que a su vez representan los dispositivos o componentes que están encargados de realizar funciones específicas. Generalmente son rectángulos, cuadrados (bloques) y círculos que se interconectan mediante líneas rectas orientadas que indican el flujo de la señal o de la información.

Un diagrama de bloques representa las etapas más importantes de un sistema sin hacer énfasis en las características internas de cada etapa o bloque, sino más bien en su relación entre la entrada y la salida, la cual puede ser expresada matemáticamente por la función de transferencia. Generalmente el diagrama de bloques se expresa en el dominio de  $s$ ; sin embargo, también se puede expresar en el dominio de  $t$ .

### Elementos de un diagrama de bloques

**a) Bloque funcional:** se representa por un rectángulo y hace referencia a dispositivos que realizan operaciones matemáticas dentro del sistema, también puede decirse que representan una planta.

**b) Sumador o comparador:** esta representado por una circunferencia dividida donde cada porción de ella debe indicar un signo matemático de suma o resta y hace referencia a que la salida es la suma algebraica de las señales que ingresan al sumador.

**c) Punto de bifurcación:** es el punto del cual una señal que sale de un bloque que va de manera concurrente a otros bloques o puntos de suma, en este punto se derivan líneas dirigidas para indicar que se ha tomado una muestra de la señal de salida del bloque funcional.

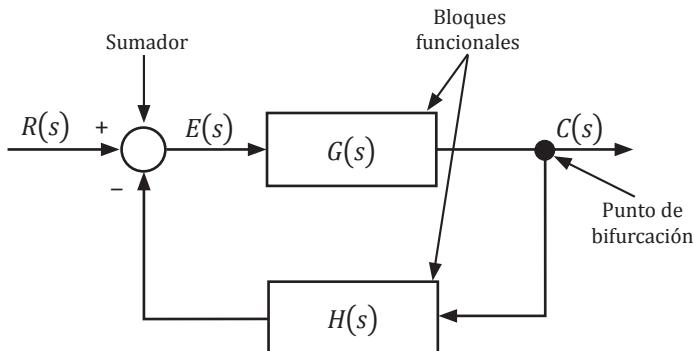


Fig. 13. Elementos de un diagrama de bloques.

### EJEMPLO 1

A continuación mostramos un ejemplo ilustrativo de un diagrama de bloques para un sistema con dos salidas y una entrada.

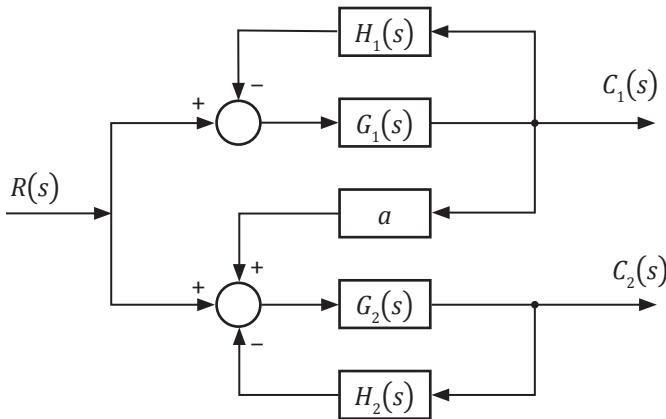


Fig. 14. Diagrama de bloques de un sistema de dos salidas.

### Representación de ecuaciones diferenciales por diagrama de bloques

Para representar una ecuación diferencial invariante en el tiempo de orden “ $n$ ” se debe aplicar el método que se describe en el siguiente ejemplo:

### EJEMPLO 2

Determinar el diagrama de bloques de la ecuación diferencial de tercer orden:

$$4y''' + 8y'' + 12y' + 2y' = f(t), \quad f(t) = e^{-t} \mu(t)$$

**Primer paso:** despejar la derivada de mayor grado.

$$y''' = \frac{f(t)}{4} - 2y'' - 3y' - \frac{1}{2}y$$

**Segundo paso:** construir el diagrama de bloques usando la ecuación anterior.

Para construir el diagrama de bloques de la ecuación diferencial se debe partir de la ecuación del primer paso, como se ve, la suma de todas las derivadas de menor orden, más la señal de entrada es igual a la derivada de mayor, por lo tanto se debe colocar a la salida del sumador. Para encontrar las derivadas de menor grado se debe integrar tantas veces como el grado de la derivada lo indique. Así mismo, se deben colocar bloques funcionales con los coeficientes de las derivadas que deben partir desde cada una de ellas para conectar con el sumador e igualmente con la entrada, las cuales deben de llegar al sumador indicando el signo que corresponda, indicado en la ecuación del primer paso, quedando el sistema como el mostrado en la Figura n° 15.

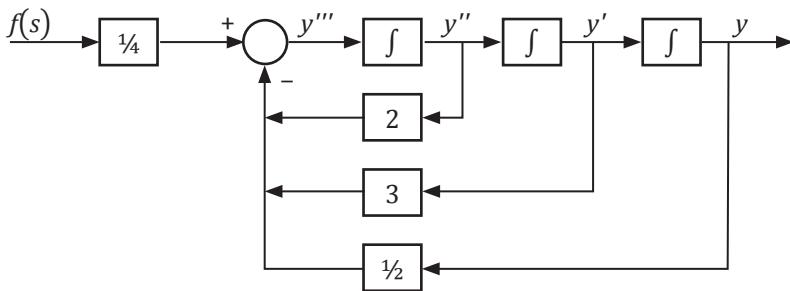


Fig. 15. Diagrama de bloques de la ecuación diferencial.

Obsérvese que todo lo que llega al sumador da como resultado a  $y''$ ; esto quiere decir que se cumple estrictamente la igualdad de la ecuación despejada en el primer paso, luego las integrales serán sustituidas por  $1/s$  al aplicar la transformada de Laplace al diagrama de bloques donde la salida será  $Y(s)$  y la entrada  $F(s)$ , las realimentaciones con valor de -2, -3 y  $-1/2$  representan los coeficientes de las derivadas de menor orden que  $y'''$ .

El siguiente diagrama ilustra la forma de representar una ecuación diferencial invariante en el tiempo en el dominio de Laplace, para ello se debe sustituir las integrales por su transformada, la cual esta representada por  $\frac{1}{s}$  y cambiar las entradas

y las salidas en función de  $s$ . Así mismo podemos decir que para cualquier ecuación diferencial con coeficientes constantes debe tener la misma forma, sólo pueden cambiar los retornos en los bloques dependiendo de los signos asociados a los coeficientes de las derivadas de menor orden que la despejada.

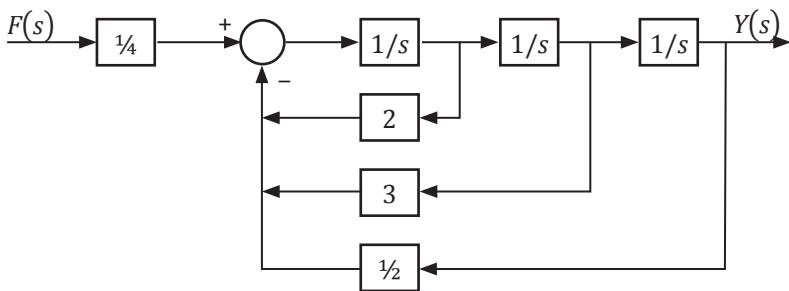


Fig. 16. Diagrama de bloques final en el dominio de Laplace.

### EJEMPLO 3

Determine el diagrama de bloques de la ecuación diferencial

$$y^{(iv)} + 6y''' - 3y'' + 2y' + y = e^{-t}\mu(t),$$

Siguiendo el proceso del ejemplo anterior, primero despejamos la derivada de mayor orden

$$y^{(iv)} - e^{-t}\mu(t) - 6y''' + 3y'' - 2y' - y$$

y el diagrama de bloques resultante se dibuja en la Figura n° 17.

Para el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales invariantes en el tiempo, se sigue el mismo proceso y se respeta la igualdad de las ecuaciones, conectando una variable con la otra: este tipo de caso es el más común en sistemas de control, porque en un sistema no sólo se observa y se controla una variable, sino varias variables simultáneamente, donde algunas podrían ser entradas y otras salidas, dependiendo del caso; por ello hay que definir cuáles variables son salidas y cuáles variables son entradas o de proceso, para de esta forma construir de manera óptima el diagrama de bloques del sistema. Hay algunos auto-

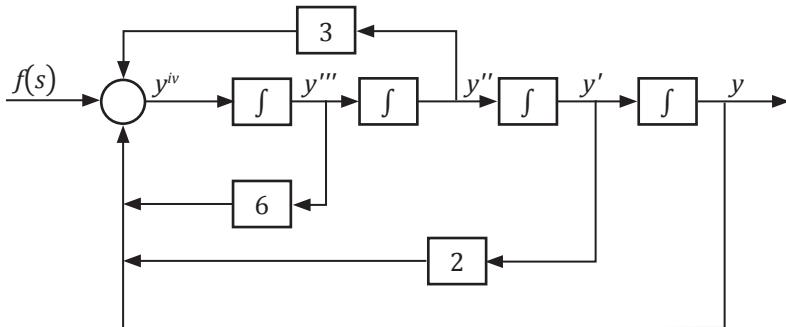


Figura 17. Diagrama de Bloques de la ecuación diferencial de cuarto orden.

res que en este tipo de situación realizan cruces en el diagrama; sin embargo, esto no es recomendable porque pudiera crear confusión, por ejemplo, un elemento de gas, digamos, podría cruzarse en el diagrama con elementos eléctricos o flujo con presión, etc., lo que no sucede en la realidad. Por esta razón, trataremos siempre de construir un diagrama de bloque sin que se realicen cruces en las realimentaciones.

#### EJEMPLO 4

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales invariantes en el tiempo, con condiciones iniciales iguales a cero.

$$\begin{cases} y'' + 3x' - 2y' + y = e^{-3t} \\ x'' - 5y' + 7x' - 2x - 2y = e^t \end{cases}$$

Tómese  $X$  como la variable de salida  $y$  y  $Y$  como la variable de entrada, así mismo se toman  $f_1(t) = e^{-3t}$ ,  $f_1(t) = e^t$  como entradas, que a su vez se convertirán en el diagrama de bloques en  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$ , respectivamente. Siguiendo el procedimiento ilustrado en el Ejemplo n° 1, obtenemos:

$$y'' = e^{-3t} - 3x' - 2y' - y$$

$$x'' = e^t + 5y' - 7x' - 2x + 2y$$

y el diagrama de bloques resultante se muestra en la Figura n° 18.

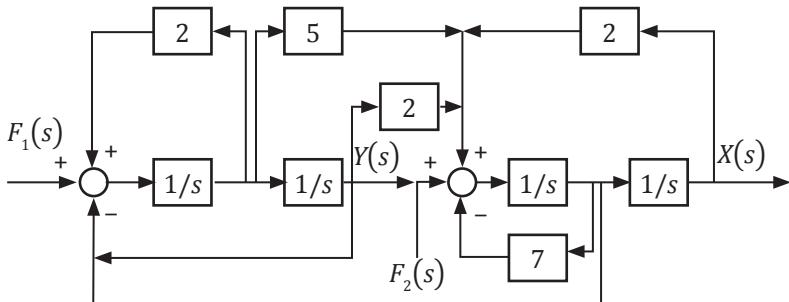


Fig. 18. Diagrama de bloques del sistema de ecuaciones.

### Gráficos de flujo de señal de un sistema

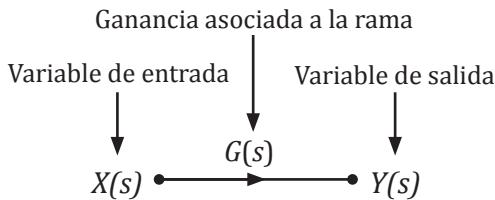
Los diagramas de bloques son muy útiles para representar las interrelaciones entre las variables controladas y las variables de entradas; sin embargo, para sistemas muy complejos el proceso de reducción por diagrama de bloques es muy engorroso y difícil de completar, pero un diagrama de bloque y el gráfico flujo de señal contienen la misma información y no hay ninguna ventaja de uno sobre el otro, sólo hay una preferencia personal por el gráfico de flujo de señal como método que facilita el cálculo de las ganancias de sistemas más complejos.

### Definición del gráfico de flujo de señal

La representación de un diagrama de bloques en segmentos de rectas orientadas, como caminos orientados desde las entradas hasta las salidas de un sistema dado.

### Elementos de un diagrama de flujo de señal

- Nodo:** está representado en el gráfico de flujo de señal como un punto, a su vez él representa las variables del sistema.
- Nodo de entrada:** también llamado nodo fuente, es aquel donde sólo salen ramas.
- Nodo de salida:** es aquel nodo al que sólo le llegan ramas.
- Rama:** es un segmento de recta orientado que parte de un nodo y llega a otro nodo, con ganancia y dirección asociada.



$$Y(s) = G(s) X(s), \text{ o } G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- e. **Trayectoria:** es la sucesión continua de ramas que van en una misma dirección.
- f. **Trayectoria directa:** es aquella trayectoria que comienza en un nodo de entrada y termina en un nodo de salida del sistema.
- g. **Ganancia de una trayectoria:** es el producto de todas las ganancias de las ramas que conforman una trayectoria.
- h. **Malla:** lazo o bucle, es aquella trayectoria que se origina y termina en un mismo nodo.
- i. **Ganancia de un lazo o malla:** es el producto de las ganancias de todas las ramas que forman ese lazo o malla.

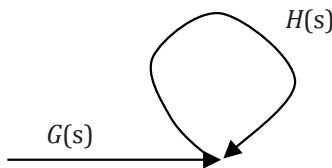


Fig. 19. Malla o lazo.

- j. **Lazos independientes (no se tocan):** son aquellos lazos que no tienen nodos en común.

### Representación de un sistema en diagrama de flujo de señal

Para representar un sistema con un diagrama de flujo de señal, previamente debe haberse construido el diagrama de

bloques y solo a partir de allí, se debe respetar exactamente la constitución del mismo, es decir, no se debe alterar ningún elemento, se debe sustituir cada bloque por una rama, las realimentaciones deben sustituirse por lazos, sólo debemos indicar las variables de salida y las variables de entrada del sistema. Para ilustrar el procedimiento, a continuación se da un ejemplo.

### EJEMPLO 5

Sea el sistema mostrado en la figura:

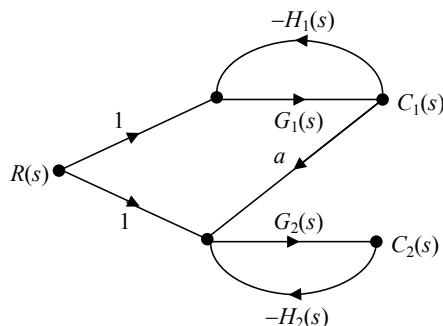
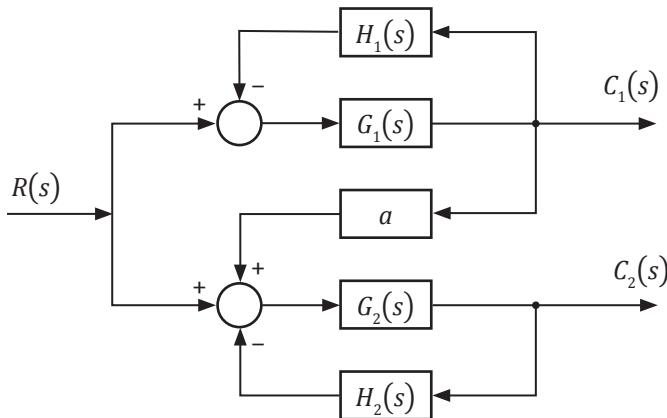


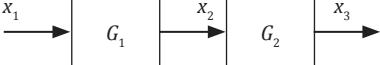
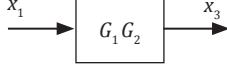
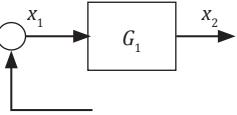
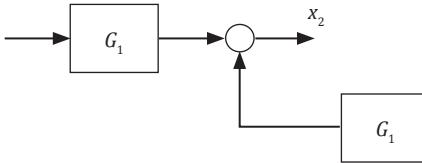
Fig. 20. Gráfico de flujo de señal del sistema del Ejemplo 5.

## Métodos para determinar las ganancias de un sistema usando gráfico de flujo de señal o diagrama de bloques

### Método de reducción de diagramas de bloques

La representación en diagramas de bloques a menudo se pueden reducir a un diagrama de bloques simplificado, que mostramos en la Figura n° 12 de este capítulo como modelo de control, el cual ya conocemos su análisis y resultado; tales reducciones son aplicadas de acuerdo a las reglas que se ilustran en la Tabla n° 1, estas operaciones según estas reglas se denominan álgebra de bloques.

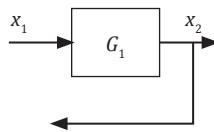
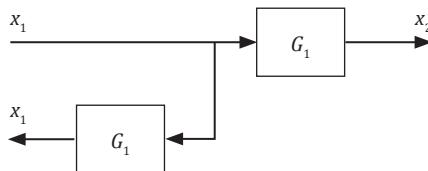
**Tabla 1. Reglas de reducción en los diagramas de bloques.**

<b>DESCRIPCIÓN</b>	
1. Combinación de bloques.	
	
<b>DESCRIPCIÓN</b>	
2. Movimiento de un punto de separación anterior a un bloque.	
<b>DIAGRAMA ORIGINAL</b>	<b>EQUIVALENTE</b>
	

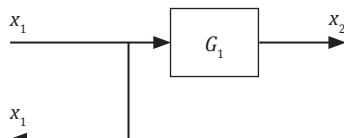
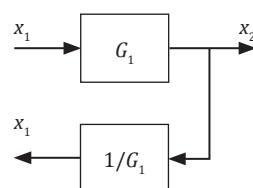
(TABLA 1. Continuación)

**DESCRIPCIÓN**

3. Movimiento de un punto de separación posterior a un bloque.

**DIAGRAMA ORIGINAL****EQUIVALENTE****DESCRIPCIÓN**

4. Movimiento de un punto de separación anterior al bloque.

**DIAGRAMA ORIGINAL****EQUIVALENTE**

(TABLA 1. Continuación)

DESCRIPCIÓN	
5. Movimiento a un punto de suma posterior a un bloque.	
DIAGRAMA ORIGINAL	EQUIVALENTE
DESCRIPCIÓN	
6. Eliminación de un lazo de realimentación	
DIAGRAMA ORIGINAL	EQUIVALENTE

## EJEMPLO 6

Determinar la ganancia del sistema mostrado en la Figura n° 21 usando las reglas de la Tabla 1 para la reducción de los diagramas de bloques usando sus equivalentes.

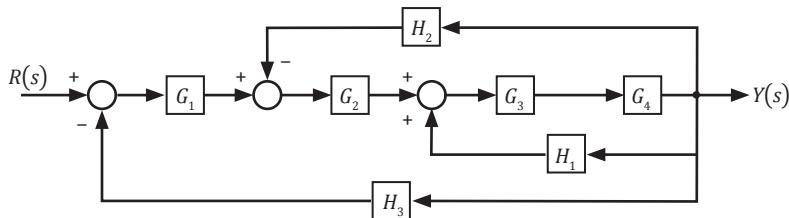
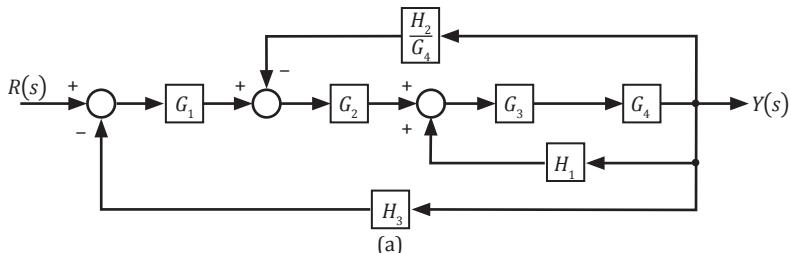
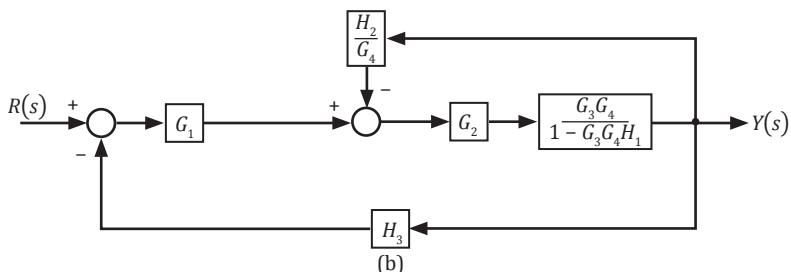


Fig. 21. Diagrama de bloque del sistema de una entrada y una salida.

**Primer paso:** se aplica la regla n° 2 equivalencia del movimiento de un punto de separación anterior al bloque  $G_4$  de la Tabla 1, nos queda:



**Segundo paso:** se aplica primero la regla n° 1 de la Tabla n° 1. Combinación de Bloques  $G_3$ ,  $G_4$  y luego regla n° 6, eliminación de un lazo de realimentación a los bloques  $G_3$ ,  $G_4$  y  $H_1$ , lo que nos da como resultado:

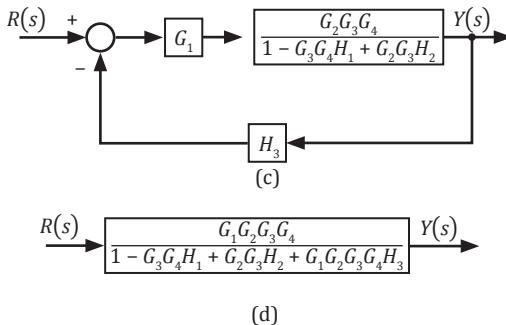


**Tercer paso:** en primer término se aplica la regla n° 6 de la Tabla 1, eliminación de un lazo de realimentación a los bloques.

$$\frac{H_2}{G_4} G_4 \text{ y } \frac{G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1}$$

luego se vuelve aplicar la misma regla a los bloques resultantes de la operación anterior.

$$G_1, \frac{G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 - G_3 G_4 H_2}, H_3 \text{ nos queda:}$$



Finalmente, la ganancia del sistema queda definida con la expresión que está contenida en el último bloque producto de la reducción del diagrama de bloques, y se obtiene:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3} = G(s)$$

### Fórmula de ganancia de Mason para diagrama de flujo de señal

El procedimiento que permite determinar la función de transferencia en gráficos de flujo de señal que utiliza la denominada fórmula de ganancia de Mason es relativamente simple, pero se debe tener mucho cuidado con los términos del numerador y denominador porque fácilmente podemos pasar por alto algunos de ellos.

Es importante mencionar que debido a la dificultad que han manifestado los estudiantes en la comprensión del cálculo de las ganancias de un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas, mostraremos la fórmula de Mason de otra manera (más didáctica, usando recursos andragógicos para su fácil comprensión), con ello evitaremos confusiones. Sin embargo, esta no se cambia, en esencia es la misma mostrada desde otra perspectiva. Para nuestros propósitos la llamaremos sencillamente fórmula de Mason ampliada, basado en las definiciones anteriores de los elementos del gráfico de flujo de señal.

La fórmula de Mason ampliada queda expresada como:

$$G(s) = \frac{\sum_{k=1}^p M_k \Delta_k}{\Delta}, \quad (36)$$

donde:

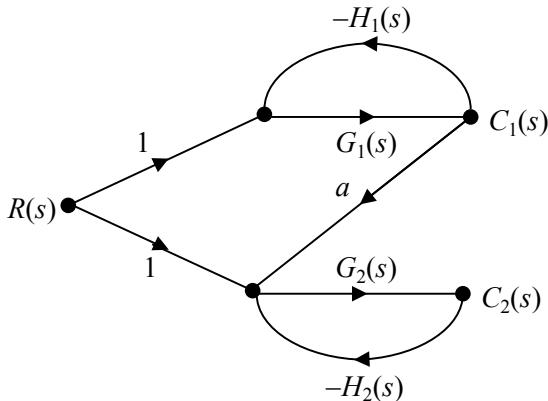
$M_k$  = La ganancia de la trayectoria directa de la  $k$ -ésima trayectoria directa de una entrada respecto de una salida.

$\Delta$  =  $1 - \text{suma de las ganancias individuales de todos los lazos del sistema} + \text{la suma de productos de todas las combinaciones de los lazos independientes que existen en el sistema.}$

$\Delta_k$  = es la parte de  $\Delta$  conformado por los lazos que no toca a la  $k$ -ésima trayectoria directa.

#### EJEMPLO 6

Tomemos el sistema del ejemplo n° 5 para encontrar la ganancia del sistema usando la fórmula ampliada de Mason.



**Primer paso:** convertimos el diagrama de bloque en el gráfico de flujo de señal usando las definiciones anteriores.

**Segundo paso:** observamos que es un sistema que tiene una entrada y dos salidas, lo que significa que hay que calcular dos ganancias, éstas conforman la matriz columna de ganancias del sistema, representadas por  $C_1(s)/R(s)$  y  $C_2(s)/R(s)$ . Para este

cálculo aplicamos la fórmula ampliada de Mason.

Para el primer caso,  $C_1(s)/R(s)$ , observamos que sólo hay una trayectoria directa, esto significa que  $k = 1$ , desde  $R(s)$  hasta  $C_1(s)$ .

La ganancia de la trayectoria  $M_1 = G_1(s)$ , así mismo calculamos,

$$\Delta_1 = 1 - (-H_2 G_2),$$

luego determinamos el valor de:

$$\Delta = 1 - (-H_1 G_1 - H_2 G_2) + (-H_1 G_1)(-H_2 G_2) =$$

$$1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 H_1 G_2 H_2,$$

y observamos que  $\Delta_1$  es una parte de  $\Delta$  que corresponde a los lazos que no toca esa trayectoria.

Análogamente procedemos a calcular  $C_2(s)/R(s)$ , con la diferencia de que hay dos trayectorias directas  $M_1 = aG_1 G_2$  y  $M_2 = G_2(s)$  y  $\Delta_1 = 1$ , porque no hay lazos que no toque esa trayectoria,

$$\Delta_2 = 1 + G_1 H_1$$

**Tercer paso:** sustituimos los términos calculados en la fórmula ampliada de Mason y obtenemos la ganancia del sistema completo:

$$\frac{C_1(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)[1 + G_2 H_2]}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 H_1 G_2 H_2},$$

De igual forma hallamos:

$$\frac{C_2(s)}{R(s)} = \frac{aG_1 G_2 + G_2(1 + G_1 H_1)}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 H_1 G_2 H_2}$$

las cuales representan las ganancias del sistema.

### Ejemplo 7

Determine la matriz de ganancias del sistema mostrado en la Figura n° 22.

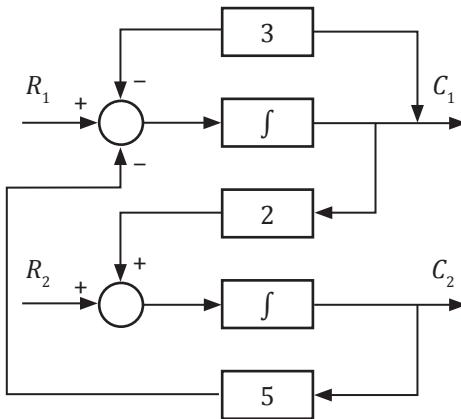
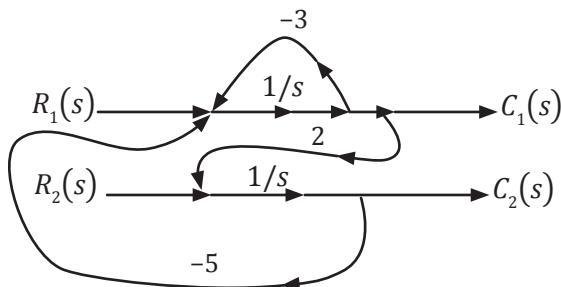


Fig. 20. Diagrama de bloques de un sistema de dos entradas y dos salidas.

Usando el mismo procedimiento anterior:



Observemos que hay una matriz de cuatro ganancias,  $G_{11}(s)$ ,  $G_{12}(s)$ ,  $G_{21}(s)$ ,  $G_{22}(s)$ , aplicamos la fórmula ampliada de Mason y obtenemos las ganancias:

$$G_{11}(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{10}{s^2} + 0},$$

nótese que se suma cero porque no hay lazos independientes,

$$G_{11}(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 10},$$

y análogamente obtenemos las demás ganancias,

$$G_{12}(s) = \frac{\frac{2}{s^2}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{10}{s^2}} = \frac{2}{s^2 + 3s + 10},$$

$$G_{21}(s) = \frac{-\frac{5}{s^2}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{10}{s^2}} = -\frac{-5}{s^2 + 3s + 10},$$

$$G_{22}(s) = \frac{\frac{1}{s} \left(1 + \frac{3}{s}\right)}{1 + \frac{3}{s} + \frac{10}{s^2}} = \frac{(s+3)}{s^2 + 3s + 10}$$

## **Introducción a las matrices de estado**

El método de variable de estado se utiliza para describir, con un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, a un sistema lineal o no lineal variante o invariante en el tiempo. Este método ha sido utilizado desde hace mucho tiempo en la descripción de sistemas dinámicos.

### **Definición de ecuación de estado**

Se denomina variable de estado al conjunto linealmente independiente de variables que se utiliza para especificar el estado de un sistema cuyo estado se describe mediante un número finito de variables de estado, este sistema se conoce como sistema finito. La ecuación de estado debe formularse de tal modo

que si se obtiene el valor del sistema en un instante dado (condición inicial) junto con los valores de las variables de entrada para ese momento y para toda  $t$ , entonces la disposición del sistema y de estas variables se podrá determinar su valor para cualquier otro momento  $t$ , la solución del sistema. La forma matricial de la ecuación de estado es:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad (37)$$

donde:

$\mathbf{x}(t)$ : Es el vector de estado,

$A$  : Matriz de coeficientes de  $n \times n$ .

$\mathbf{u}(t)$ : Es el vector de entrada o de excitación.

$B$  : Matriz de distribución  $n \times m$ .

La ecuación de estado se escribe de la forma:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & a_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (38)$$

### Ecuación de estado de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial ordinaria de orden “ $n$ ”, con coeficientes constantes, se puede expresar como una ecuación de estado. Este proceso de transformación se describe en el Ejemplo nº 8 a continuación.

#### EJEMPLO 8

Dada una ecuación diferencial con coeficientes constantes:

$$2x''' - 6x'' + 4x' + 10x = e^{-3t}\mu(t)$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -2$$

**Primer paso:** se despeja la derivada de mayor orden.

$$x''' = \frac{e^{-3t}\mu(t)}{3} + 3x'' - 2x' - 5x$$

**Segundo paso:** se efectúan cambios de variables en la forma indicada a continuación. Se puede usar la letra que se deseé, siempre y cuando no sea igual a la letra de la variable de la ecuación diferencial.

$$z_1 = x$$

$$z_2 = z'_1$$

$$z_3 = z'_2$$

$$z'_3 = \frac{1}{2} e^{-3t}\mu(t) + 3z_3 - 2z_2 - 5z_1$$

**Tercer paso:** se construye la matriz de estado usando las ecuaciones anteriores.

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} e^{-3t}\mu(t) \quad z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Esta forma matricial representa la ecuación de estado de la ecuación diferencial dada.

Ahora ilustraremos el método para el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

### EJEMPLO 9

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$x'' - 3y' - 5x' - 6y = f_1(t)$$

$$y'' - 5x' - 3y' + 8x - y = f_2(t)$$

Para este caso se sigue el procedimiento anterior, sólo que se debe realizar dos veces.

$$\begin{aligned}x'' &= f_1(t) + 3y' + 5x' + 6y \\y'' &= f_2(t) + 5x' + 3y' - 8x + y\end{aligned}$$

Los cambios de variables a ejecutar son los siguientes:

$$z_1 = x$$

$$z_2 = z'_1$$

$$z_2 = z'_2$$

$$z'_2 = f_1(t) + 3w_2 + 5z_1 + 6w_1$$

$$w_1 = y$$

$$w_2 = w'_1$$

$$w'_2 = f_2(t) + 5z_2 + 3w_2 - 8z_1 + w_1$$

La matriz de estado queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

### **La ecuación de estado y el gráfico de flujo de señal**

La ventaja de utilizar las ecuaciones de estado radica en el hecho de que es muy fácil representar una ecuación de estado mediante un gráfico de flujo de señal y, por consiguiente, calcular la ganancia del sistema; ahora describiremos el proceso.

#### **EJEMPLO 10**

Dado la siguiente matriz de estado:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} f(t)$$

Tome a  $x_2$  como variable de salida y siga el siguiente procedimiento.

**Primer paso:** se escriben las ecuaciones matriciales:

$$x'_1 = -6x_2 - f(t)$$

$$x'_2 = x_1 - 5x_2 + 3f(t)$$

**Segundo paso:** se aplica transformada de Laplace a ambos lados de las ecuaciones:

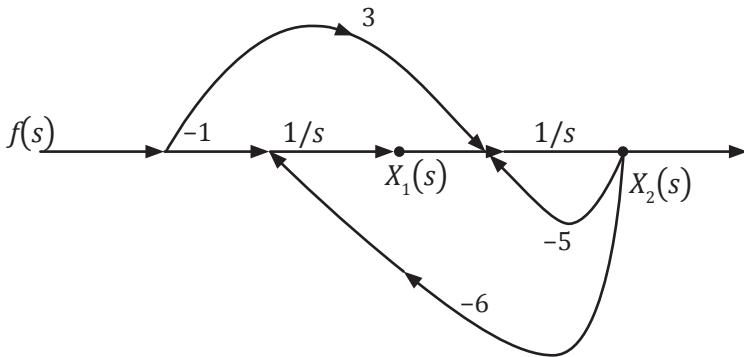
$$sx_1(s) = -6x_2(s) - f(s)$$

$$sx_2(s) = x_1(s) - 5x_2(s) - 3f(s)$$

$$x_1(s) = -\frac{1}{s}6x_2(s) - \frac{1}{s}f(s)$$

$$x_2(s) = \frac{1}{s}x_1(s) - \frac{5}{s}x_2(s) + \frac{3}{s}f(s)$$

**Tercer paso:** construir el gráfico de flujo de señal:



#### EJEMPLO 11

Consideré el sistema de doble entrada y doble salida, cuyas ecuaciones de estado son las siguientes:

$$x'_1 = -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 10R_2$$

$$x'_2 = -3x_2 + 2x_3$$

$$x'_3 = -4x_2 + 2R_1$$

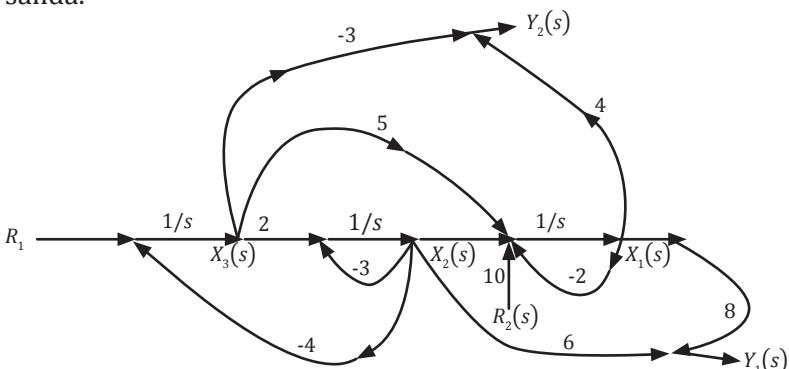
donde las salidas del sistema son:

$$y'_1 = 8x_1 + 6x_2$$

$$y'_2 = 4x_1 + 3x_2$$

Tome como variable de salida a  $x_1$ .

En este ejemplo usamos las definiciones de variables de salida y la salida del sistema, el primer término  $x_1$  representa el nodo final de la trayectoria directa o trayectorias directas que tiene el gráfico de flujo de señal del sistema. Como el nodo  $x_1$  representa una variable del sistema, entonces esta variable representa la salida de todos los caminos del gráfico de señal. Es posible encontrar sistemas que tienen varias variables de salidas y estas pueden formar parte de la salida o salidas del sistema. En segundo término, la salida del sistema puede estar representada por una sola variable de salida o por las sumas algebraicas de las variables que conforman el sistema, formando una transformación lineal, las cuales son operaciones de sumas algebraicas de señales entrantes que generan una señal de salida.



Siguiendo el procedimiento anterior se obtiene el siguiente gráfico de flujo de señal:

Obsérvese que la variable de salida del sistema es  $x_1$  y las salidas del sistema son  $y_1, y_2$  que son transformaciones lineales de  $x_1, x_2, x_3$ .

## PROBLEMAS

1. Determine el diagrama de bloque y el gráfico de flujo se señal de las siguientes ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales. Donde las variables  $y(t)$ ,  $x(t)$ ,  $r(t)$ , son las variables de salida, entrada y excitación, respectivamente, del sistema.

$$y''' + 2y'' + 5y' + 6y = 3r' + r$$

$$y^{iv} + 10y'' + y' + 5y = 5r$$

$$y''' - 10y'' + 2y' + y + 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = r' + 2r$$

$$2y'' + y' + 5y = r(t-1) + r$$

$$\begin{cases} 3y'' - 6x' - 3y' - 2x = e^{-2t} \\ x'' - 5y' + 4x' - 6y = e^{-3t} \end{cases}$$

$$y'' + 2y' + 4y' = 3\sin(5t)$$

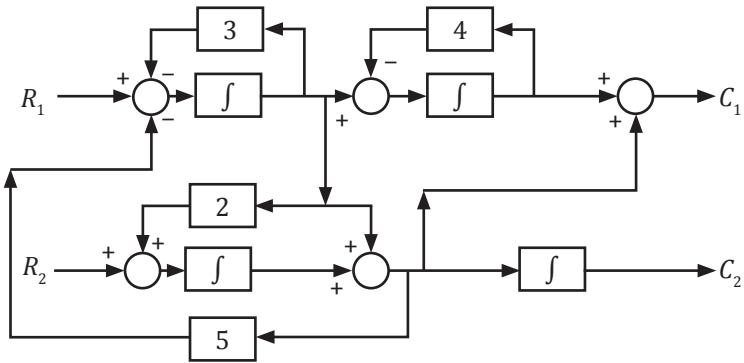
$$y'' + 2y' + 6y = 4\sin(2t) + 3\cos(3t)$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3x = r_1(t) + r_2(t) \\ x'' + 3y' - 4x + y = r_2(t) + r'_1 \end{cases}$$

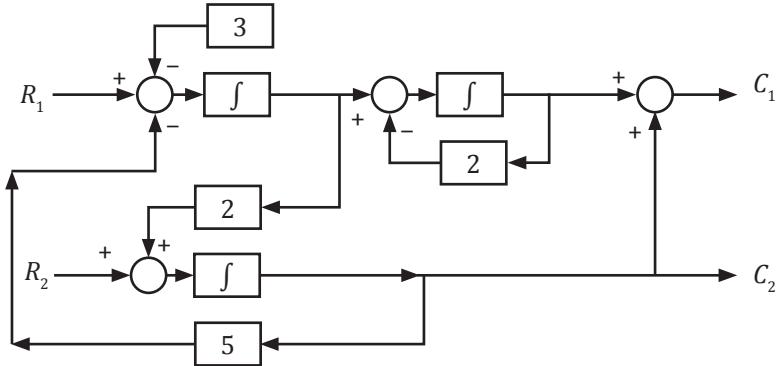
2. De las ecuaciones diferenciales y los sistemas de ecuaciones diferenciales del problema anterior, determinar las ecuaciones de estado que representan estos sistemas.

3. Determine la ganancia de los sistemas usando álgebra de bloque y luego compruebe usando la fórmula ampliada de Mason.

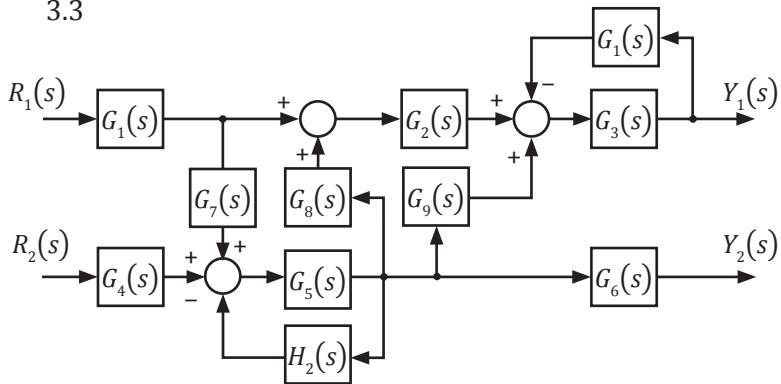
3.1



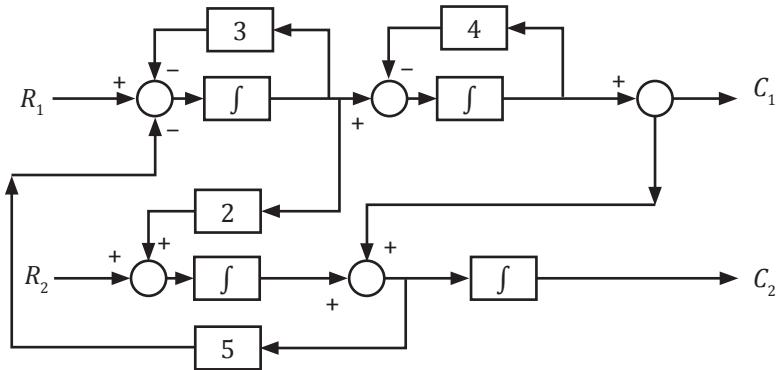
3.2



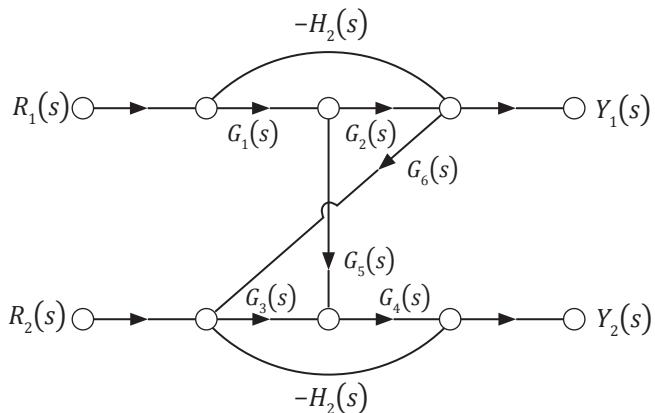
3.3

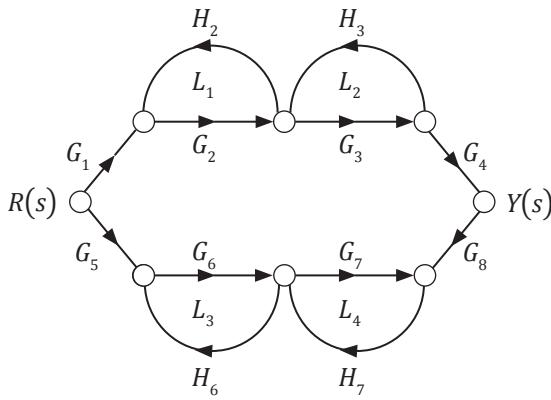


## 3.4



3.5. En los siguientes diagramas de flujo de señal determine la ganancia del sistema.





4. Determine el gráfico de flujo de señal para los sistemas expresados en diagrama de estado, considere las condiciones iniciales cero.

4.1

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ \mu(t) \end{bmatrix}$$

4.2

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

4.3

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \mu(t)$$

4.4

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t)$$

4.5

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t)$$

4.6

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t)$$

4.7

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mu(t)$$

## REFERENCIAS

1. D'azzo, John and Houpis, Constantine. **Linear Control System Analysis and Design.** McGraw-Hill, 4ta. ed. New York, 1995.
2. Barrientos, Antonio, Ricardo, Sanz. **Control de Sistemas Continuos, problemas resueltos,** McGraw-Hill, España, 1996.
3. Dorf, Richard and Bishop, Robert. **Sistemas de Control Moderno,** Pearson. 10ma. ed. España, 2006.
4. Dorsey, John. **Sistemas de Control Continuos y Discretos,** McGraw-Hill 1era. ed. México, 2003.
5. Edwards and Penney. **Ecuaciones Diferenciales.** Prentice Hall, 4ta. ed. 2001.
6. Eronini-Umez-Eronini, **Dinámica de Sistemas de Control.** Thomson Learning, México, 2001.
7. Groosman, Stanley and Derrick, William. **Advanced Engineering Mathematics.** Harper and Row, 1era. ed. 1988.
8. Kamen, Edgard. **Introduction to Signals and Systems.** Prentice Hall. 2da. ed. New York, 1990.
9. Kuo, Benjamin and Golnaraghi, Farid. **Automatic Control Systems.** Wyle and Sons. 8va. ed. New York, 2003.
10. Neagle Kent, Saff, Edgard y Snider, Arthur. **Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores de Frontera.** Addison Wesley. 4ta. ed. 2005.
11. Nise, Norman. **Control Systems Engineering.** Wiley & Sons. 4ta ed. California, 2007
12. Ogata, Katsuhito. **Ingeniería de Control Moderna.** Pearson. 4ta. ed. España, 2002.
13. Phillips, Charles and Harbor, Royce. **Feedback Control Systems.** Prentice Hall, 3era. ed. 1996.
14. Roberts, M. J. **Señales y Sistemas.** McGraw-Hill, 1era. ed. 2004.

15. Valencia, Hernán. **Sistemas Automáticos de Control.** Serie Nabla Delta, Universidad Pontificia Bolivariana, 1997.
16. Fongiel, M. **Automatic Control Systems, Robotics,** Research and education association 1era. ed. 2000.
17. Zill, Dennis y Cullen, Michael. **Ecuaciones Diferenciales con valores de frontera.** Thompson Learning, 5ta. ed. 2002.

## **CAPÍTULO 4**

# **MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS**

### ***Introducción***

Una de las tareas más importantes en el análisis y diseño de sistemas de control es el modelar matemáticamente los sistemas físicos. Los dos métodos más comunes para modelar sistemas lineales son el método de la función de transferencia y el método de variable de estado. La función de transferencia es válida sólo para sistemas lineales invariantes en el tiempo, mientras que las ecuaciones de estado son aplicadas a sistemas lineales y no lineales.

Aunque el análisis y diseño de los sistemas de control lineal han sido bien desarrollados, su contraparte, los sistemas no lineales son usualmente muy complejos, por lo tanto los ingenieros de sistemas de control con frecuencia tienen necesidad de determinar cómo describir de manera precisa a un sistema matemáticamente, pero es más importante aún hacer consideraciones y aproximaciones de manera apropiada, cuando sea necesario, para que los sistemas puedan ser realmente descritos por modelos matemáticos lineales.

El principal objetivo de este capítulo será mostrar los modelos matemáticos de los sistemas de control y sus componentes, los cuales son pasos fundamentales en el análisis de los sistemas de control. El modelado nos permitirá el detalle de los elementos que conforman un sistema y la naturaleza de su funcionamiento con el objeto de brindar facilidad en el análisis y diseño de sistemas de control, el cual mostraremos en la me-

todología a aplicar en este proceso.

### ***Metodología para el análisis y diseño de un sistema de control***

Los pasos a seguir para el análisis y diseño de un sistema de control son:

1. Estudio preliminar del problema o situación tomando en cuenta como funciona en la actualidad, las dificultades, limitaciones (desempeño), características de operación, aspectos del sistema que se puede aprovechar.
2. Determinar los parámetros y requerimientos para una óptima operación del sistema, lo cual estará definido de acuerdo a las exigencias o necesidades a satisfacer.
3. Análisis y selección de la tecnología (circuitos, compensadores, sensores, sistema supervisorio, etc.) existente en el mercado con la finalidad de comparar las versatilidades de los fabricantes y seleccionar la que más se ajuste a los parámetros y requerimientos establecidos en la fase anterior.
4. Diseño de la arquitectura del sistema, con el objeto de esquematizar la construcción del modelo o prototipo para facilitar el análisis su comportamiento.
5. Propuesta del sistema. En esta fase se muestra el sistema usando la arquitectura diseñada y la tecnología diseñada para su construcción y prueba final.
6. Verificación de su funcionamiento aplicando el método de análisis (Pruebas de sistema).

Para el estudio detallado del modelado de los sistemas eléctricos, mecánicos y electromecánicos nos basaremos en las leyes del movimiento y las leyes circuitales, las cuales forman parte del primer y segundo paso de esta metodología para el análisis y diseño de un sistema de control.

## Modelado de sistemas eléctricos

La manera clásica de escribir ecuaciones en los circuitos eléctricos se atribuye a las dos leyes de Kirchoff y la manera moderna de representar estas ecuaciones circuitales, utilizando el método de variable de estado, para ello es necesario conocer el modelo matemático de cada uno de los componentes de un circuito eléctrico, a continuación se describe:

### 1. La resistencia eléctrica

Según la Ley de Ohm el modelo matemático sobre el voltaje que produce una resistencia cuando pasa una corriente a través de ella es  $V = R$  expresado en voltios (v) y por consiguiente la

resistencia es  $R = \frac{V}{I}$  expresada en Ohmios ( $\Omega$ ) (véase en la Figura n° 23).

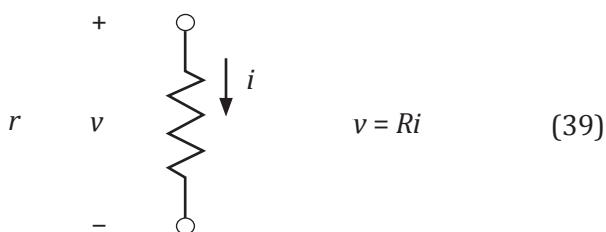


Fig. 23. La resistencia.

### 2. La inductancia

Según Joseph Henry (1797-1878) y Michael Faraday (1791-1867), el voltaje aplicado a una bobina o inductor es directamente proporcional a la razón de cambio respecto al tiempo de la corriente que fluye a través de este elemento o dispositivo circuital, lo cual expresa su modelo matemático como  $V_L = \frac{di_L}{dt}$ , véase en la Figura n° 24.

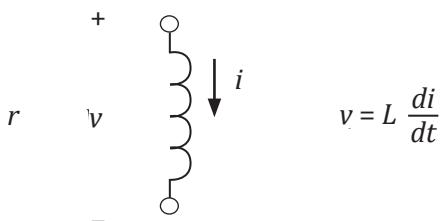


Fig. 24. La bobina o inductor.

### *El capacitor*

Según Michael Faraday (1791-1867) un voltaje aplicado a placas paralelas da por resultado un campo eléctrico entre ellas y la corriente que fluye es directamente proporcional a la razón de cambio respecto al tiempo del voltaje del dispositivo circuital y su modelo matemático queda expresado por  $I_c = \frac{dV_c}{dt}$  véase en la Figura n° 25.

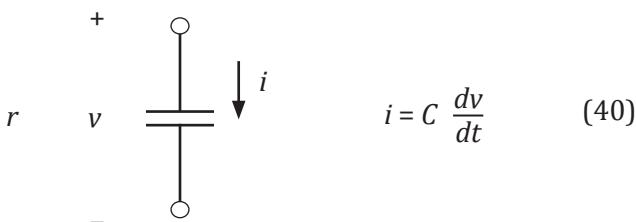


Fig. 25. El capacitor.

### *El amplificador operacional*

El Amplificador operacional usualmente llamado (Op Amp), es un dispositivo con dos terminales de entrada, denominados + y - o bien entrada no inversora y entrada inversora, respectivamente. El dispositivo se conecta además a una fuente de corriente continua ( $+V_c$  y  $-V_c$ ), la referencia común para las entradas, la salida y la fuente de alimentación se encuentra fuera del

amplificador operacional se denomina tierra ( $-V_o$ ), la tensión de salida depende de la diferencia de potencial en las entradas, despreciando los efectos capacitivos, el modelo matemático para el caso inversor es el mostrado en la Figura n° 26 es:

$$\frac{V_2}{V_1} = - \frac{R_2}{R_1} \quad (41)$$

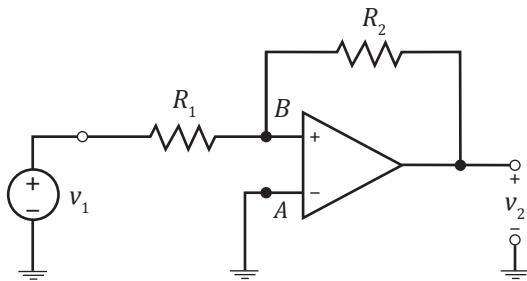


Fig. 26. Amplificador operacional.

### Fuentes de voltajes y corrientes

Las fuentes de corrientes y de voltajes serán consideradas entradas a los circuitos y pueden ser independientes o dependientes, a continuación se muestra:

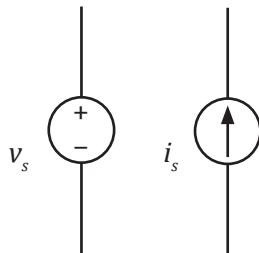


Fig. 27. Fuentes independientes.

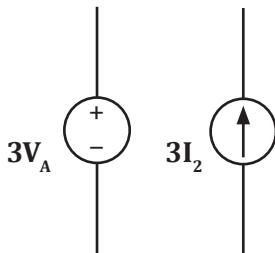


Fig. 28. Fuentes dependientes.

Usando los modelos matemáticos de cada uno de los componentes y usando las leyes circuitales de Kirchoff, podemos determinar el gráfico de flujo de señal y la ganancia del sistema, partiendo de la linealización de las ecuaciones diferenciales del circuito, en otras palabras las ecuaciones de estado de los sistemas eléctricos dados, esta es una forma moderna y efectiva de determinar la ganancia de estos sistemas.

#### EJEMPLO 1

Determine la matriz de estado y el gráfico de flujo de señal del circuito mostrado en la Figura n° 29.

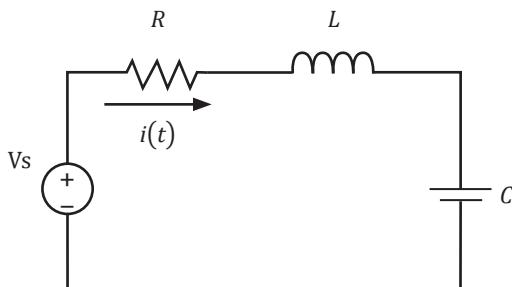


Fig. 29. Circuito RCL.

**Primer paso:** se aplica las leyes circuitales de Kirchoff para encontrar las ecuaciones diferenciales que representan el circuito, tomando como variables de estado  $i_L$ ,  $V_c$ .

$$\text{LKV: } -V_s + Ri_L + L \frac{di_L}{dt} + V_c = 0$$

$$\text{LKC: } i_L = \frac{dV_c}{dt}$$

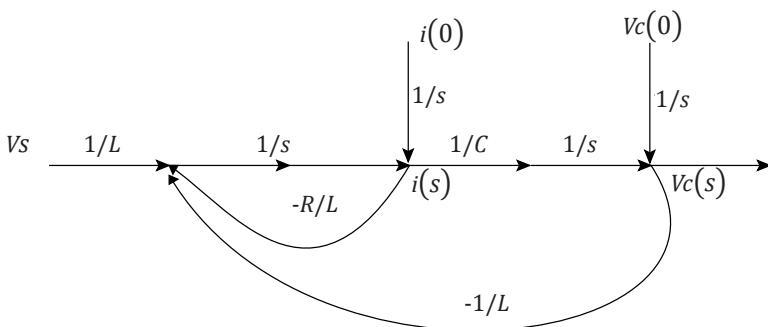
**Segundo paso:** se despeja las derivadas  $\frac{di_L}{dt}, \frac{dV_c}{dt}$  de las ecuaciones dadas:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_s}{L} - R \frac{i_L}{L} - \frac{V_c}{L}$$

**Tercer paso:** construir la matriz de estado.

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ V'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_s$$

**Cuarto paso:** construir el gráfico de flujo de señal.



**Quinto paso:** ganancia del sistema.

Considerando las condiciones iniciales cero, la ganancia aplicando la fórmula ampliada de Mason es:

$$G(S) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{LCS^2 + RCS + 1}$$

### Ejemplo 2

Determine la matriz de estado del circuito mostrado en la Figura n° 30.

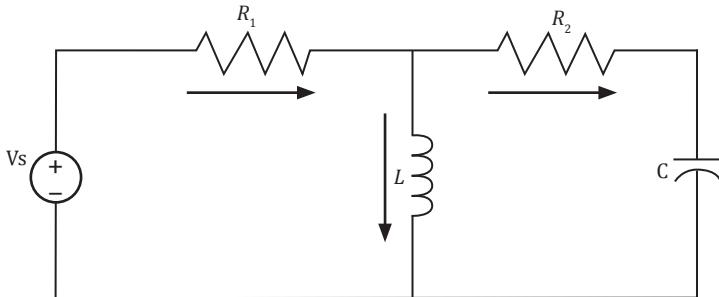


Fig. 30. Circuito eléctrico combinado.

Siguiendo el procedimiento anterior obtenemos:

**Primer paso:**

$$I = I_L + I_C$$

$$-Vs + R_1 I + L \frac{dI_C}{dt} = 0$$

$$-L \frac{dI_L}{dt} + L_2 I_C + Vc = 0$$

**Segundo paso:** se combinan las ecuaciones anteriores de la siguiente forma:

$$I = I_L + C \frac{dV_c}{dt}$$

$$-Vs + R_1(I_L + C \frac{dV_c}{dt}) + R_2C \frac{dV_c}{dt} + Vc = 0$$

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{Vs}{C(R_1 + R_2)} - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} I_L - \frac{Vc}{C(R_1 + R_2)}$$

Así mismo,

$$\begin{aligned} L \frac{dI_L}{dt} &= R_2 C \frac{dV_c}{dt} + Vc, \quad L \frac{dI_L}{dt} \\ &= R_2 \left( \frac{Vs}{R_1 + R_2} \right) - R_1 R_2 \frac{I_L}{R_1 + R_2} - R_2 \frac{V_c}{R_1 + R_2} + V_c \end{aligned}$$

De donde,

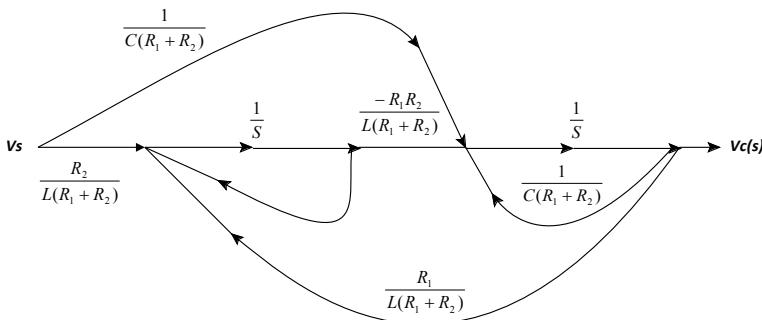
$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} Vs - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} I_L + \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} Vc$$

**Tercer paso:** matriz de estado.

$$\begin{bmatrix} I'_L \\ V'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 R_2 & R_1 \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & \frac{1}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} [Vs]$$

**Cuarto paso:** construir el gráfico de flujo de señal.

Dejamos al lector el cálculo de la ganancia a partir del gráfico de flujo de señal, el cual se resuelve de manera análoga al del Ejemplo 1.



### Modelado de sistemas mecánicos

La mayoría de los sistemas de control los elementos mecánicos son tan buenos como los componentes eléctricos. Algunos sistemas mecánicos tienen elementos hidráulicos y neumáticos. Desde el punto de vista matemático las ecuaciones que describen los elementos eléctricos y mecánicos presentan analogías, de hecho el movimiento de los elementos mecánicos pueden describirse en varias dimensiones, traslacional y rotacional o combinación de ambos. Las ecuaciones que rigen los sistemas mecánicos de movimiento son a menudo formulados por la ley de movimiento de Newton.

$$\sum F = ma \quad (42)$$

Usando esta ley, podemos formular las ecuaciones que describen cada elemento que conforman un sistema mecánico. A continuación mostramos.

### Sistemas mecánicos traslacionales

- La masa:** se considera un elemento que almacena energía cinética en el movimiento traslacional, observe la Figura n° 31.

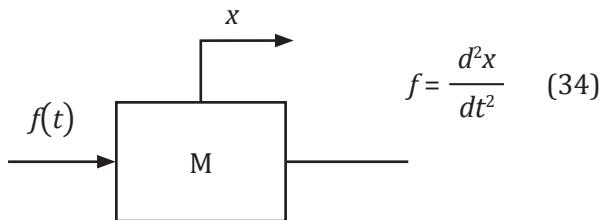


Fig. 31. Modelado de la masa.

- b. **El amortiguador:** representa un elemento de fricción viscosa y una relación de retardo entre la fuerza aplicada y la velocidad, la expresión de su modelo matemático es:

$$F = \beta \frac{dx}{dt}, \quad (44)$$

donde  $\beta$  representa el coeficiente de fricción viscosa.

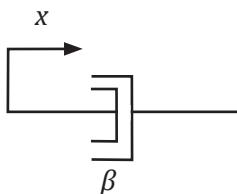


Fig. 32. Modelado del amortiguador.

- c. **Resorte lineal:** representa un elemento de respuesta lineal o proporcional a la fuerza que se aplica sobre él, se puede considerar como un elemento mecánico que actúa como una correa, cable o resorte, el cual almacena energía potencial. La expresión matemática es:

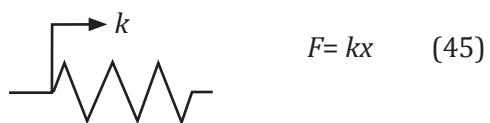


Fig. 33. Modelado del resorte.

- d. **La fuerza de fricción:** representa una relación de retardo entre la fuerza aplicada que tiene una constante  $\beta$  de amplitud con respecto al cambio de velocidad. La expresión de su modelo matemático es:

$$F = \beta \frac{dx}{dt} \quad (47)$$

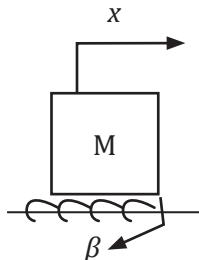


Fig. 34. Modelado de la fuerza de fricción.

- e. **Fuerzas externas:** estas fuerzas son las responsables del movimiento del sistema mecánico, las cuales pueden ser motores, palancas y manillas, las cuales quedan representadas por  $f(t)$  en el diagrama del sistema.

### EJEMPLO 3

Determinar las ecuaciones dinámicas y la matriz de estado del sistema mecánico translacional mostrado.

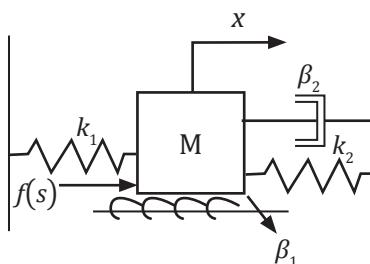


Fig. 35. Sistema mecánico de translación del Ejemplo 3.

**Primer paso:** aplicar la ley de Newton de movimiento a la masa para determinar la ecuación dinámica del sistema, para ello sólo se deben identificar todos los elementos mecánicos opositores al movimiento. Seguidamente, escribir la ecuación tomando todas las expresiones de cada uno de los componentes mecánicos identificados previamente como negativos y las fuerzas externas que generan el movimiento como positivas. La ecuación dinámica de este sistema es:

$$k_1 x + \beta_1 \frac{dx}{dt} m \frac{d^2x}{dt^2} + k_2 x + \beta_2 \frac{dx}{dt} = f(t)$$

**Segundo paso:** despejar la derivada de mayor grado.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f(t)}{m} - \frac{(k_1 + k_2)}{m} x - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{m} \frac{dx}{dt}$$

**Tercer paso:** cambio de variable para linealizar la ecuación diferencial.

$$Z_1 = x$$

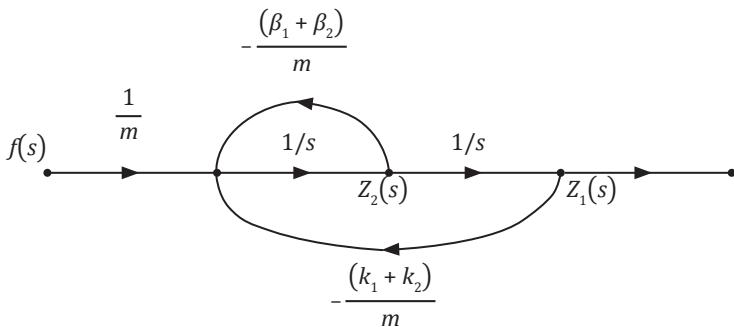
$$Z_2 = \dot{Z}_1$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{f(t)}{m} - \frac{(k_1 + k_2)}{m} Z_1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{m} Z_2$$

**Cuarto paso:** construir la matriz de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(k_1 + k_2)}{m} & -\frac{(\beta_1 + \beta_2)}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t)$$

**Quinto paso:** diagrama de flujo de señal.



Se deja al lector como ejercicio calcular la ganancia del sistema  $\frac{Z_1(s)}{f(s)}$ .

#### EJEMPLO 4

Determinar las ecuaciones dinámicas y la matriz de estado del sistema mecánico traslacional mostrado a continuación:

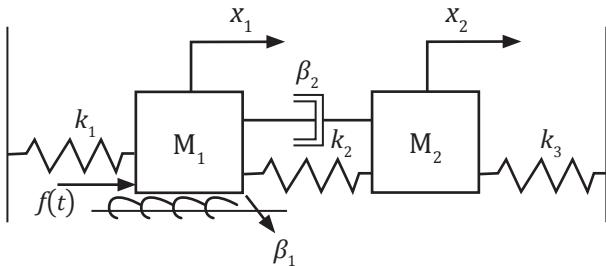


Fig. 36. Sistema mecánico de traslación del Ejemplo 4.

**Primer paso:** aplicar la ley de Newton para determinar las ecuaciones dinámicas del sistema usando el procedimiento descrito en el Ejemplo 1, con la diferencia de que cuando analicemos elementos mecánicos que se encuentren entre las dos masas, se escribirá una diferencia de desplazamientos en  $x$ , to-

mando como positivo el desplazamiento de la masa analizada y negativa el desplazamiento de la otra masa sin analizar, en nuestro caso, para cuando analicemos la masa n° 1 el desplazamiento  $x_1$  es positivo y  $x_2$  será negativo y para cuando analicemos la masa n° 2 se invierten los signos.

Masa  $M_1$

$$\begin{aligned} k_1 x_1 + \beta_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_2 (x_1 - x_2) \\ + \beta_2 \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = f(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Masa  $M_2$

$$k_3 x_2 + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \frac{d(x_2 - x_1)}{dt} + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (2)$$

Resolviendo y agrupando términos nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{f(t)}{m_1} + \frac{k_1 x_2}{m_1} + \frac{\beta_2}{m_1} \frac{dx_2}{dt} \\ - \frac{(k_1 + k_2)}{m_1} x_1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{m_1} \frac{dx_2}{dt^2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{\beta_2}{m_2} \frac{dx_1}{dt} - \frac{(k_3 + k_2)}{m_2} x_2 \\ - \frac{\beta_2}{m_2} \frac{dx_2}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

**Segundo paso:** realizar las cambios de variables.

$$Z_1 = x_1$$

$$Z_2 = \dot{Z}_1$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_2 &= \frac{f(t)}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} W_1 + \frac{\beta_2}{m_1} W_2 \\ &\quad - \frac{(k_1 + k_2)}{m_1} Z_1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{m_2} Z_2\end{aligned}$$

$$W_1 = x_2$$

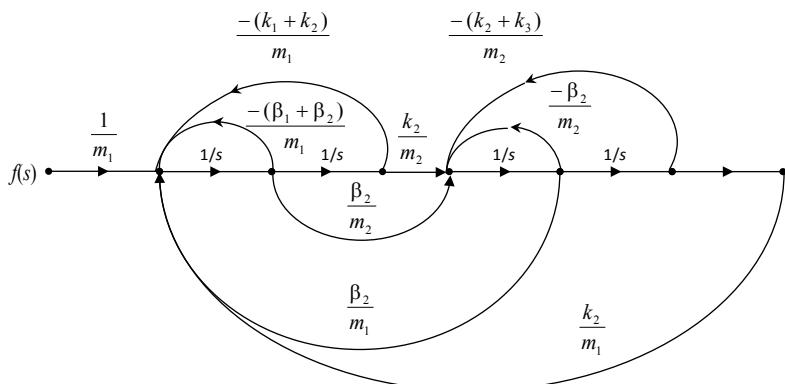
$$W_2 = \dot{W}_1$$

$$\dot{W}_2 = \frac{k_2}{m_2} Z_1 + \frac{\beta_2}{m_2} Z_2 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} W_1 - \frac{\beta_2}{m_2} W_2$$

**Tercer paso:** construir la matriz de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{W}_1 \\ \dot{W}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1} - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{\beta_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{\beta_2}{m_2} - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} & -\frac{\beta_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

**Cuarto paso:** gráfico de flujo de señal.



## Sistemas mecánicos de rotación

Los sistemas rotacionales son análogos a los sistemas translacionales (las ecuaciones son de la misma naturaleza o forma), se usa el mismo procedimiento para determinar las ecuaciones dinámicas del sistema. Los tres elementos que usaremos en los sistemas rotacionales se describen a continuación.

- El primer elemento es el **momento de inercia**, el cual es definido por la ecuación:

$$\tau(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} = J \frac{dw(t)}{dt} \quad (48)$$

donde  $\tau(t)$  es el torque o par aplicado,  $J$  es el momento de inercia, donde  $\theta$  es el ángulo de rotación, y  $w(t)$  es la velocidad angular. La ecuación (48) es análoga a la de masa en un sistema translacional, bastará con sustituir  $\tau(t)$  por  $f(t)$ ,  $m$  por  $J$  y  $\theta$  por  $x$ , tal como es mostrado en la Figura n° 37.

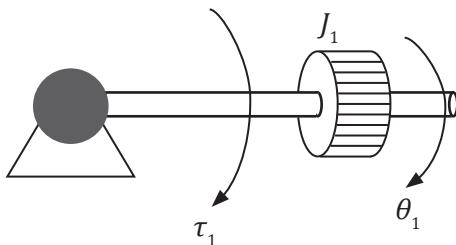


Fig. 37. Momento de inercia.

- El **amortiguador** es el segundo elemento, el cual está definido por la ecuación:

$$\tau(t) = \beta \frac{d\theta}{dt} \quad (49)$$

donde  $\beta$ , representa el coeficiente de amortiguamiento o de fricción y donde  $\theta$  es el ángulo de rotación, como se muestra en la Figura n° 38.

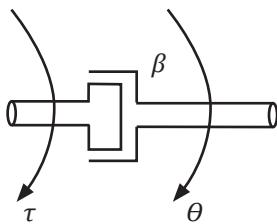


Fig. 38. Amortiguador.

**El resorte rotacional:** este representa el tercer elemento rotacional, el cual está definido por la ecuación:

$$\tau(t) = k\theta \quad (50)$$

donde  $k$  representa la constante de elasticidad del resorte y  $\theta$  es el ángulo de rotación, como se muestra en la Figura n° 39.

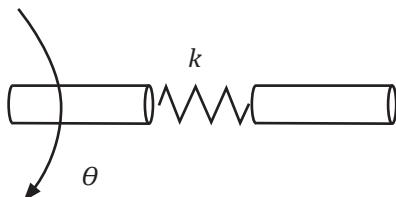


Fig. 39. El resorte rotacional.

Además de estos elementos principales, se debe incorporar otro elemento no menos importante y muy usado en la industria y en los sistemas mecánicos tradicionales como lo son **los engranajes**, el cual está definido por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (51)$$

y

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}, \quad (52)$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  representan el número de dientes de cada engranaje,  $T_1$  y  $T_2$  son sus torques o pares mecánicos respectivos, los cuales son ilustrados en la Figura n° 40.

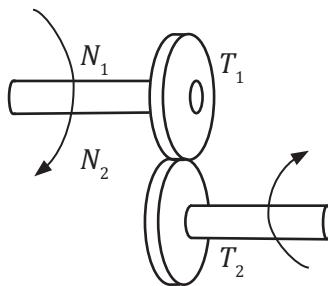


Fig. 40. Los engranajes.

## EJEMPLO 5

Determinar las ecuaciones dinámicas y la matriz de estado del sistema mecánico rotacional mostrado a continuación.

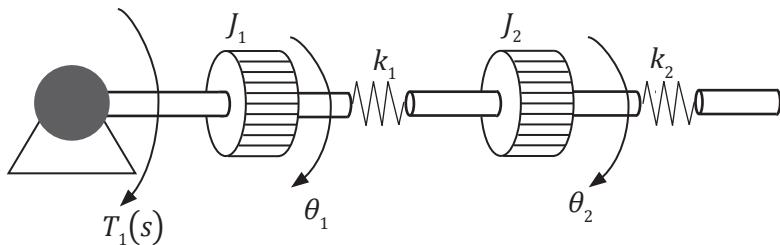


Fig. 41. Sistema rotacional del Ejemplo 5.

**Primer paso:** determinar las ecuaciones dinámicas, siguiendo de manera análoga el procedimiento de análisis de masas descrito en los sistemas de traslación.

Masa  $J_1$

$$T(s) = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + k_1 (\theta_1 - \theta_2)$$

Masa  $J_2$

$$k_1 (\theta_2 - \theta_1) + k_2 \theta_2 + J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{T}{J_1} + \frac{k_1}{J_1} \theta_2 - \frac{k_1 + k_2}{J_1} \theta_1$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{k_1}{J_2} \theta_1 - \frac{(k_1 + k_2)}{J_2} \theta_2$$

**Segundo paso:** realizar cambios de variables.

$$Y_1 = \theta_1$$

$$Y_2 = \dot{\theta}_1$$

$$\dot{Y}_2 = \frac{T}{J_1} + \frac{k_1}{J_1} X_1 - \frac{k_1}{J_1} Y_1$$

$$X_1 = \theta_2$$

$$X_2 = \dot{\theta}_1$$

$$\dot{X}_2 = \dot{\theta}_2$$

$$\dot{X}_2 = \frac{k_1}{J_2} Y_1 - \frac{(k_1 + k_2)}{J_2} X_1$$

**Tercer paso:** construir la matriz de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{J_1} & 0 & \frac{k_1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{J_2} & 0 & -\frac{(k_1 + k_2)}{J_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T$$

Se deja como ejercicio realizar el cálculo de la ganancia del sistema rotacional.

#### EJEMPLO 6

Determine la matriz de estado del sistema mecánico de rotación mostrado.

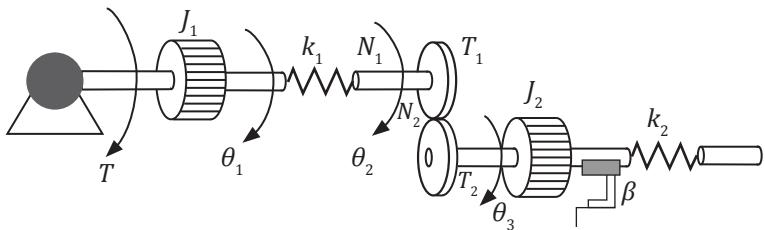


Fig. 42. Sistema rotacional del Ejemplo 6.

Siguiendo el proceso explicado en el ejemplo anterior, analizamos  $J_1$ .

$$T(s) = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + k_1 (\theta_1 - \theta_2)$$

de donde;

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{T}{J_1} + \frac{k_1\theta_2}{J_1} - \frac{k_1\theta_1}{J_1}$$

Luego analizamos el engranaje y  $J_2$ .

$$k_1(\theta_2 - \theta_1) + T_1 = 0$$

$$k_1\theta_2 - k_1\theta_1 + T_1 = 0$$

$$T_2(s) = J_2 \frac{d^2\theta_3}{dt^2} + k_2\theta_3 + \beta \frac{d\theta_3}{dt}$$

Luego,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2}, \quad \theta_3 = \frac{n_1}{n_2} \theta_2, \quad T_1 = \frac{n_1}{n_2} T_2$$

$$k_1\theta_2 - k_1\theta_1 + J_2 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + k \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \theta_2 + \beta \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \frac{d\theta_2}{dt} = 0$$

Realizamos cambio de variables para construir la matriz de estado:

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{k_1}{J_2 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2} \theta_1 - \frac{\left( k_3 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 + k_1 \right)}{J_2 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2} \theta_2 - \frac{\beta}{J_2} \frac{d\theta_2}{dt}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1 & y_1 &= \theta_2 \\ x_1 &= \dot{x}_1 & y_1 &= \dot{y}_1 \end{aligned}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{T}{J_1} + \frac{k_1}{J_1} y_1 - \frac{k_1}{J_1} x_1$$

$$\dot{y}_2 = \frac{k_1}{J_2 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2} x_1 - \frac{\left( k_3 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 + k_1 \right)}{J_2 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2} y_1 - \frac{\beta}{J_2} y_2$$

La matriz de estado queda representada como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{J_1} & 0 & \frac{k_1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{J_2 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2} & 0 & -\frac{k_3 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 + k_1}{J_2 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2} & -\frac{\beta}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T$$

## Sistemas electromecánicos

La corriente eléctrica y el campo magnético interactúan de dos maneras particularmente importantes. Para comprender la operación de la mayoría de los sistemas electromecánicos se deben considerar dos aspectos, el primero consiste en que si una corriente  $i$  amperios circula a través de un conductor de longitud  $L$  metros y además éste es colocado en un campo magnético  $B$  Tesla que forme un ángulo recto respecto a la corriente, entonces existe una fuerza generada en el conductor queda expresada en magnitud en Newton por la ecuación:

$$F = Li \text{ Newtons} \quad (53)$$

Esta ecuación es la base de la conversión de energía eléctrica en trabajo mecánico y es llamada **Ley de Motores**.

El segundo es la relación electromecánica importante. Consiste en el efecto mecánico de movimiento en voltajes eléctricos. Si un conductor de longitud  $L$  metros se mueve en un campo magnético  $B$  Tesla a una velocidad  $v$  en metros por segundos y mutuamente forman un ángulo recto ( $B$  y  $v$ ), entonces el voltaje generado en el conductor queda expresada en magnitud en la ecuación:

$$e(t) = BLv \text{ Voltios} \quad (54)$$

Esta ecuación es llamada la **Ley de Generadores**.

Ahora bien, analizaremos motores de corriente continua para los casos generador por corriente de campo y motores de corriente de armadura.

### **Generador corriente directa (CD)**

Un generador CD puede ser usado como un suplidor de potencia, en el cual la potencia requerida para excitar el circuito de campo es más baja que el índice potencia de salida del circuito de armadura, el voltaje  $e_g$  inducido en el circuito de armadura es directamente proporcional al flujo magnético  $\phi$ , producido por el campo y la velocidad de rotación  $w$ , en la armadura expresada como:

$$e_g = K_1 \phi w \quad (55)$$

El flujo en función de la corriente de campo y el tipo de material usado. Hasta llegar a saturación, esta relación es aproximadamente lineal, entonces el flujo es directamente proporcional a la corriente de campo:

$$\phi = K_2 i_f \quad (56)$$

$$e_g = K_1 K_2 i_f w_f \quad (57)$$

Se considerara la velocidad del generador constante y la ecuación queda expresada:

$$e_g = K_f i_f \quad (58)$$

El modelo del generador se representa en la Figura n° 37, donde  $L_a$ ,  $R_a$ ,  $R_f$ ,  $L_f$  son las resistencias e inductancia de armadura y campo respectivamente.

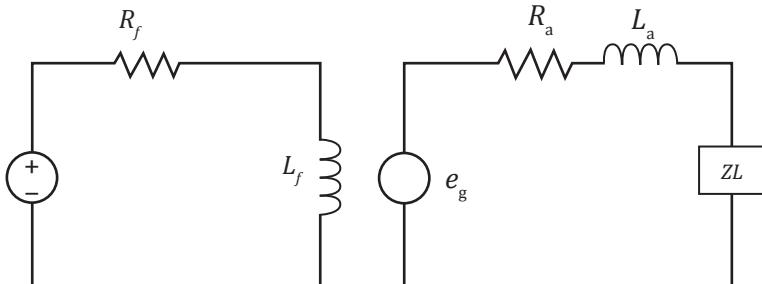


Fig. 33. Diagrama esquemático del generador.

### **Motores de corriente continua controlado por corriente armadura (inducido)**

El torque o par desarrollado por el motor mostrado en la Figura n° 43, es proporcional a la magnitud del flujo  $\phi$ , a la corriente de campo  $i_f$  y a la corriente de armadura  $i_a$ , si suponemos que la corriente de campo es constante, y esta es la encargada de generar el campo, el que a su vez es el responsable de producir el flujo  $\phi$ , entonces el flujo es aproximadamente constante, concluimos que el torque o par puede expresarse:

$$T = K_p \phi i_a \quad (59)$$

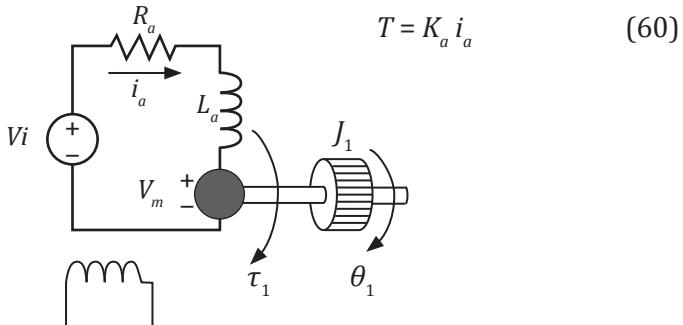


Fig. 44. Motor de corriente de armadura.

Ahora bien, el voltaje generado en el devanado de la armadura del motor,  $V_m$  puede ser escrito como:

$$V_m = K\phi \frac{d\theta}{dt} \quad (61)$$

Donde  $K$  es un parámetro del motor,  $\phi$  es el flujo magnético y  $\frac{d\theta}{dt}$  es la velocidad angular, suponemos que el flujo magnético es constante, por lo tanto la ecuación queda:

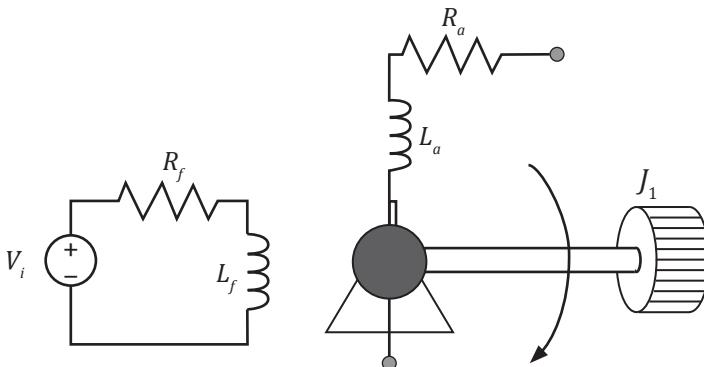
$$V_m = K_m \frac{d\theta}{dt} \quad (62)$$

La asunción del flujo es muy importante porque si el flujo es variable, entonces se convierte en una ecuación no lineal de dos variables, allí el análisis es mucho más complejo y engorroso por lo que la transformada de Laplace no puede ser usada para estos casos.

### **Motor de corriente continua controlado por corriente de campo**

El motor de corriente continua por efecto de campo convierte energía eléctrica continua en energía mecánica, gran parte del par generado es utilizado para mover cargas externas, así mismo cabe destacar que de acuerdo a las características de

funcionamiento que este tipo de motor ofrece, como lo son la generación de un par elevado, controlabilidad de la velocidad en amplios rangos y adaptabilidad a diversos tipos de métodos de control, es la razón por la cual son ampliamente utilizados en sistemas de control, tales como los manipuladores robóticos, mecanismos de transporte de cintas y unidades de cintas entre muchos ejemplos que podemos citar. A continuación mostramos en la Figura n° 45 un diagrama esquemático de un motor de corriente continua controlado por corriente de campo.



**Fig. 45. Diagrama del motor CC controlado por corriente de campo.**

El voltaje de entrada se puede aplicar a los terminales de excitación o a los del inducido. El flujo en el espacio libre en el motor es directamente proporcional a la corriente de excitación o de campo, siempre que el campo no esté saturado, de modo que:

$$\phi = K_f i_f \quad (63)$$

Se supone que el par desarrollado por el motor está relacionado linealmente con  $\phi$  y con la corriente del inducido, es decir:

$$T_m = K_1 K_f i_f(t) i_a(t) \quad (64)$$

Es evidente que para mantener la proporcionalidad de la ecuación, la corriente de armadura debe ser constante, mien-

tras que la corriente de campo es la generada por el voltaje de entrada, lo que proporciona una sustancial amplificación de potencia. Entonces se tiene:

$$T_m = K_f i_f(t) \quad (65)$$

### EJEMPLO 7

Determine la matriz de estado del sistema electromecánico mostrado a continuación:

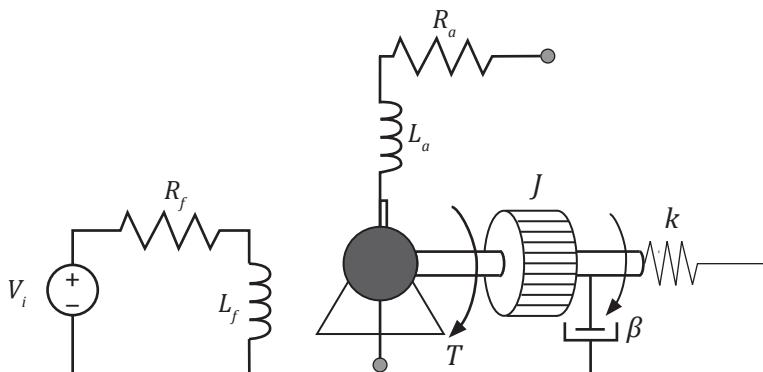


Fig. 46. Sistema electromecánico del Ejemplo 7.

**Primer paso:** se aplica la ley circuital de voltaje de Kirchoff.

$$-V_i + R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} = 0$$

**Segundo paso:** se aplica la ley de Newton para encontrar las ecuaciones mecánicas.

$$T = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta + \beta \frac{d\theta}{dt}$$

**Tercer paso:** se relacionan las ecuaciones circuitales y mecánicas, usando la ecuación n° 65.

$$T = K_f i_f \Rightarrow i_f = \frac{T}{K_f} = \frac{J}{K_f} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{K_f} \theta + \frac{\beta}{K_f} \frac{d\theta}{dt}$$

**Cuarto paso:** sustituimos la corriente de campo en la ecuación circuital.

$$\begin{aligned} -V_i + R_f \left( \frac{J}{K_f} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\beta}{K_f} \frac{d\theta}{dt} + \frac{K}{K_f} \theta \right) \\ + L_f \frac{d}{dt} \left( \frac{J}{K_f} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\beta}{K_f} \frac{d\theta}{dt} + \frac{K}{K_f} \theta \right) = 0 \\ -V_i + \frac{JL_f}{K_f} \frac{d^3\theta}{dt^3} + \left( \frac{R_f J + L_f \beta}{K_f} \right) \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ + \left( \frac{R_f \beta + L_f K}{K_f} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{K}{K_f} \theta = 0 \end{aligned}$$

**Quinto paso:** construir la matriz de estado, usando los cambios de variables.

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{x}_1$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2$$

$$\dot{x}_3 = \frac{V_i}{\left( \frac{JL_f}{K_f} \right)} - \frac{(R_f J + L_f \beta)}{JL_f} x_3 - \frac{(R_f \beta + L_f K)}{JL_f} x_2 - \frac{K}{JL_f} x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{K}{JL_f} - \frac{(R_f \beta + L_f K)}{JL_f} & - \frac{(R_f J + L_f \beta)}{JL_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_f}{JL_f} \end{bmatrix} V_i$$

### Ejemplo 8

Determine la matriz de estado del sistema electromecánico mostrado a continuación:

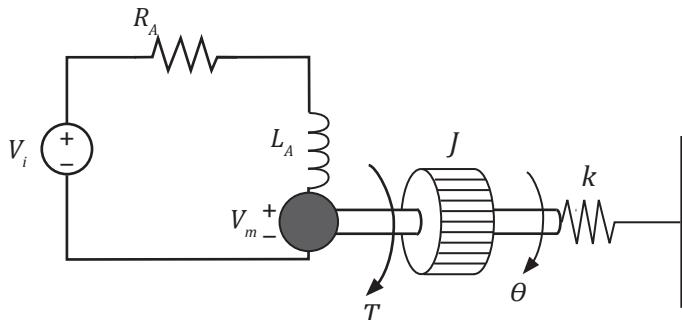


Fig. 47. Sistema electromecánico del Ejemplo 8.

**Primer paso:** se aplica la ley circuital de voltaje de Kirchoff.

$$-V_i + R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + V_m = 0$$

**Segundo paso:** se aplica la ley de Newton para encontrar las ecuaciones mecánicas.

$$T = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta$$

**Tercer paso:** se relacionan las ecuaciones circuitales y mecánicas, usando las ecuaciones nº 59, 60, 62.

$$T = K_a i_a \Rightarrow i_a = \frac{T}{K_a} = \frac{J}{K_a} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{K_a} \theta$$

$$V_m = K_m \frac{d\theta}{dt}$$

**Cuarto paso:** sustituimos la corriente de campo en la ecuación circuital.

$$-V_i + R_a \left( \frac{J}{K_a} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{K_a} \theta \right) + L_a \frac{d}{dt} \left( \frac{J}{K_a} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{K_a} \theta \right)$$

$$+ V_m = 0$$

$$-V_i + L_a \frac{J}{K_a} \frac{d^3\theta}{dt^3} + \frac{(R_a J)}{K_a} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{L_a K}{K_a} \frac{d\theta}{dt} + \frac{R_a K}{K_a} \theta = 0$$

**Quinto paso:** construir la matriz de estado usando los cambios de variables.

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\theta}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{K_a}{JL_a} V_i - \frac{R_a}{L_a} x_3 - \frac{K}{J} x_2 - \frac{R_a K}{JL_a} x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{R_a K}{JL_a} & -\frac{K}{J} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_a}{JL_a} \end{bmatrix} V_i$$

### Sistemas análogos

Los sistemas que pueden representarse mediante el mismo modelo matemático, pero son diferentes físicamente se llaman sistemas análogos, el concepto de analogía es muy importante por las siguientes razones:

1. La solución de la ecuación que describe un sistema físico puede aplicarse a un sistema análogo en forma directa en otro campo.
2. Un tipo de sistema puede que sea más fácil de manejar que otro, en lugar de construir y estudiar un sistema mecánico, podemos construir un sistema análogo eléctrico que son más fáciles de manejar experimentalmente.

### Analogía mecánico-eléctricas

Hay dos analogías eléctricas para los sistemas mecánicos; la analogía fuerza-voltaje y la analogía fuerza–corriente.

#### Analogía fuerza-voltaje

#### Sistemas Mecánicos

#### Sistemas eléctricos

Fuerza (Par $T$ )	Voltaje $e$
Masa ( $m$ ) (Momento de inercia $J$ )	Inductancia $L$
Coeficiente de fricción viscosa $\beta$	Resistencia $R$
Constante del resorte $K$	Reciproco de Capacitancia $1/C$
Desplazamiento $x$ (desplazamiento angular $\theta$ )	Carga $q$
Velocidad o Velocidad angular	Corriente $i$

#### EJEMPLO 9

Considere el siguiente sistema mecánico y el sistema eléctrico que se muestran a continuación:

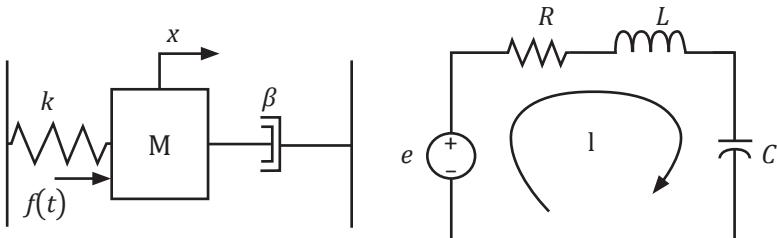


Fig. 48. Sistema análogos del Ejemplo 9.

La ecuación para el sistema mecánico es la siguiente:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + xk = f(t)$$

En tanto la ecuación del sistema eléctrico es:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e$$

Obsérvese que si comparamos las dos ecuaciones diferenciales antes descritas para los sistemas eléctrico y mecánico, notamos que estas tienen las mismas características matemáticas, por lo tanto concluimos que estos sistemas describen un comportamiento análogo.

#### *Analogía fuerza-corriente*

#### Sistemas mecánicos

#### Sistemas eléctricos

Fuerza (Par $T$ )	Corriente $i$
Masa ( $m$ ) (Momento de inercia $J$ )	Capacitancia $C$
Coeficiente de fricción viscosa $\beta$	Recíproco de la Resistencia $1/R$
Constante del resorte $K$	Recíproco de la inductancia $1/L$
Desplazamiento $x$ (desplazamiento angular $\theta$ )	Acoplamiento por flujo magnético $\phi$
Velocidad o Velocidad angular	Voltaje $e$

#### EJEMPLO 10

Consideremos el mismo sistema mecánico del Ejemplo 9, el sistema eléctrico mostrado a continuación:

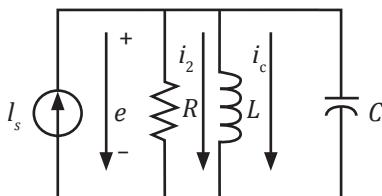


Fig. 49. Sistema eléctrico para el Ejemplo 10.

La ecuación del circuito,

$$\frac{e}{R} + i_l + C \frac{dV_c}{dt} = i_s$$

El flujo  $\phi$  esta relacionado con el voltaje mediante la ecuación:

$$\frac{d\phi}{dt} = e; \quad (66)$$

sabiendo que  $i_l = \frac{1}{L} \int edt$ ,  $i_c = C \frac{de}{dt}$

la ecuación circuital puede escribirse en función del flujo:

$$C \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{L} \phi = i_s$$

Ahora bien la ecuación del sistema mecánico del ejemplo anterior es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + xk = f(t)$$

Encontramos que los dos sistemas son análogos.

Veamos ahora como usar estas analogías en la solución de sistemas mecánicos, basándonos en los conceptos desarrollados anteriormente, para la construcción de una red mecánica o modelo eléctrico equivalente, para ello utilizaremos un ejemplo sencillo que ha continuación ilustramos.

#### EJEMPLO 11

Dibuje el modelo eléctrico equivalente o red mecánica del sistema mecánico mostrado:

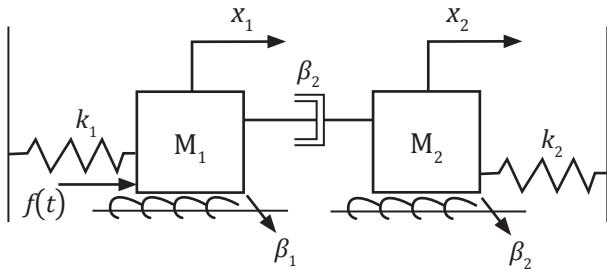


Fig. 49. Sistema eléctrico para el Ejemplo 11.

Para dibujar una red mecánica o analogía eléctrica, el primer paso es ubicar los desplazamientos  $x_1$  y  $x_2$  como nodos de referencia del circuito, todos los elementos de esta red deben ser conectados entre estos puntos. Como segundo paso se debe cumplir que sobre estos nodos la suma de todas las fuerzas debe ser igual a cero, la cual es análoga a la Ley de Kirchoff de corriente. Veamos cómo queda la red mecánica, la cual representa el modelo eléctrico equivalente.

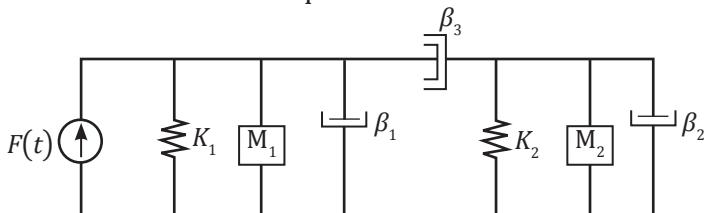


Fig. 51. Modelo eléctrico equivalente al sistema mecánico.

### Sistema de control de nivel de líquido

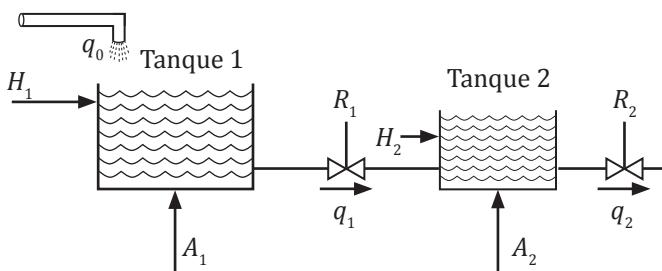


Fig. 52. Sistema de tanques con interacción.

Nomenclatura:

$q$ : Caudal.

$H$ : Nivel.

$R$ : Restricción de válvulas.

$A$ : Área de los Tanques.

Donde las ecuaciones quedan expresadas como:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_0 - q_1 \quad (67)$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_s \quad (68)$$

donde,

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}, \quad q_s = \frac{h_2}{R_2}$$

La analogía eléctrica queda expresada como:

$q \leftrightarrow \text{Corriente}$

$h \leftrightarrow \text{Voltaje}$

$A \leftrightarrow \text{Capacitancia}$

$R \leftrightarrow \text{Resistencia}$

El modelo eléctrico equivalente es:

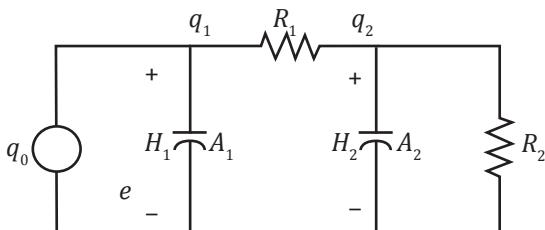


Fig. 53. Modelo eléctrico equivalente para el sistema de control de nivel.

## Sistema de transmisión de correa

En la Figura n° 54 se muestra un sistema usado comúnmente en una computadora para mover lateralmente el dispositivo de impresión, está compuesta por transmisión de correa, el dispositivo de impresión puede ser una impresora láser, impresora de bola o térmica.

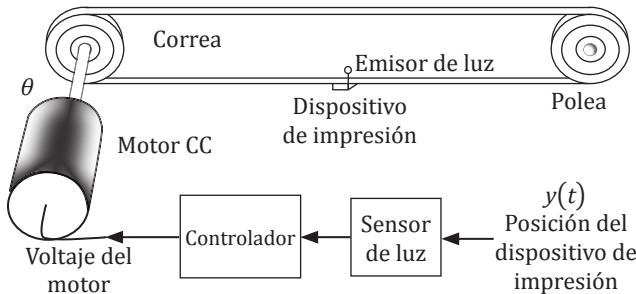


Fig. 54. Impresora por transmisión de correa.

En la Figura n° 54 muestra el modelo propuesto de un sistema de transmisión por correa, este modelo supone una constante de muelle  $k$ , el radio de la polea es  $r$ , la rotación angular del eje del motor  $\theta$  y la rotación angular de la polea de mano derecha es  $\theta_p$ . La masa del dispositivo de impresión  $m$  y su posición es  $y(t)$ ; el sensor de luz se utiliza para medir  $y$ ; la salida del sensor es un voltaje  $V_1$ ;  $V_1 = k_1 y$ ; el controlador proporciona un voltaje de salida  $V_2$ ;  $V_2$  está en función de  $V_1$ . El voltaje  $V_2$  se conecta a la excitación del motor.

Se supondrá que se puede utilizar una relación lineal:

$$V_1 = - \left( k_2 \frac{dV_1}{dt} + k_3 V_1 \right)$$

y se utilizará  $k_2 = 0, 1, k_3 = 0$ , la inercia del motor y la polea es  $J = J_{motor} + J_{polea}$ , la inductancia del campo es despreciable, a continuación procedemos a describir las ecuaciones dinámicas del sistema, obsérvese que  $y = r\theta_p$ , por lo tanto la tensión:

$$T_1 = k(r\theta - r\theta_p) = k(r\theta - y)$$

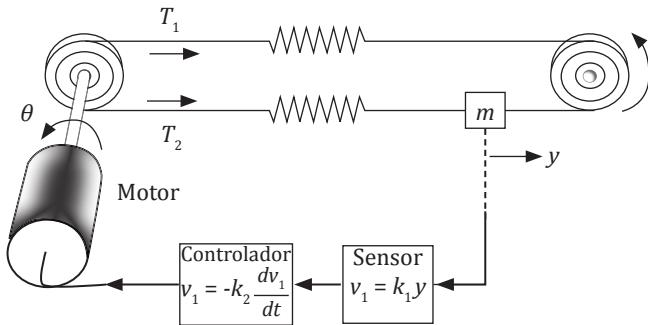


Fig. 55. Modelo para la impresora de transmisión de correa.

La tensión  $T_2$ :

$$T_2 = (y - r\theta)$$

La tensión neta en la masa  $m$ :

$$T_1 - T_2 = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

Luego,

$$T_1 - T_2 = k(r\theta - y) - (y - r\theta) = 2k(r\theta - y)$$

Ahora bien,

$$i = \frac{V_2}{R} \quad \text{y el troqué del motor,}$$

$$T_m = k_m \frac{k_m}{R} V_2$$

El motor proporciona el par de transmisión de las correas más las perturbaciones no deseadas.

$$T_m = T + T_d$$

De donde,

$$T = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + r(T_1 + T_2)$$

$$T_m = \frac{k_m}{R} V_2, \quad V_2 = -k_2 \frac{dV_1}{dt}, \quad V_1 = y$$

$$T_m = -k_1 k_2 \frac{k_m}{R} \frac{dy}{dt}$$

Despejando las variables:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k_1 k_2 k_m}{JR} \frac{dy}{dt} - \frac{\beta}{J} \frac{d\theta}{dt} - \frac{2kr^2}{J} \theta + \frac{2kr}{J} y + \frac{T_d}{J}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2kr}{m} \theta - \frac{2k}{m} y$$

Haciendo cambios de variables, para construir matriz de estado, tenemos:

$$y = x_1$$

$$x_2 = \dot{x}_1$$

$$\theta = z_1$$

$$z_2 = \dot{z}_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{2kr}{m} x_1 - \frac{2kr}{m} z_1$$

$$z_2 = -\frac{k_1 k_2 k_m}{JR} x_2 - \frac{\beta}{J} z_2 - \frac{2kr^2}{J} z_1 + \frac{2kr}{J} x_1 - \frac{T_d}{J}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2kr}{m} & 0 & \frac{2kr}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2kr}{J} & -\frac{k_1 k_2 k_m}{J} - \frac{2kr^2}{J} & -\frac{\beta}{J} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} T_d$$

## **Transformación de modelos matemáticos usando Matlab**

Si conocemos la función de transferencia de un sistema, podemos determinar la matriz de estado a cual pertenece dicha relación  $\frac{y(s)}{x(s)} = G(s)$ , veamos un ejemplo sencillo.

### EJEMPLO 11

Sea la función de transferencia:  $G(s) = \frac{s}{s^3 + 14s^2 + 56s + 150}$ .

Determine la matriz de estado usando MATLAB.

Se escribe en la Herramienta MATLAB:

```
> num=[0 0 1 0];
>den=[ 1 14 56 160];
```

Representan los coeficientes de los polinomios numerador y denominador respectivamente, luego,

```
>[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
```

El resultado es el siguiente:

A=

$$\begin{matrix} -14 & -56 & -160 \\ 11 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 \end{matrix}$$

B=

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

C=

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

D=

$$\begin{matrix} 0 \end{matrix}$$

**EJEMPLO 12**

Sea la matriz de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & -25 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ -120 \end{bmatrix} u(t) \quad y = [100] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

determine la función de transferencia  $\frac{y(s)}{u(s)}$  usando Matlab.

Se escribe en la herramienta Matlab:

```
>A=[0 1 0; 0 0 1; -5 -25 -5];
>B=[0; 25; -120]
>C=[1 0 0]
>D=[0];
>[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
```

El resultado se muestra a continuación;

num=

0.0000 0.0000 -25.0000 -245.0000

den=

1.0000 5.0000 25.0000 5.0000

Luego;

Printsys=(num,den)

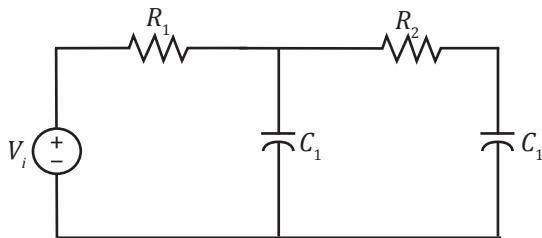
La corrida mostrará:

$$\frac{\text{num}}{\text{den}} \quad \frac{25s + 5}{s^3 + 5s^2 + 25s + 5}$$

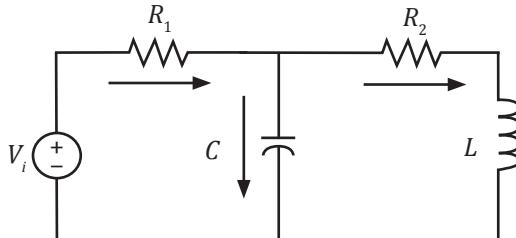
## PROBLEMAS

1. Determine la matriz de estado y la ganancia del sistema para los sistemas eléctricos dados a continuación:

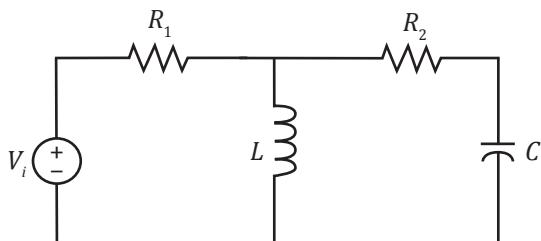
1.1



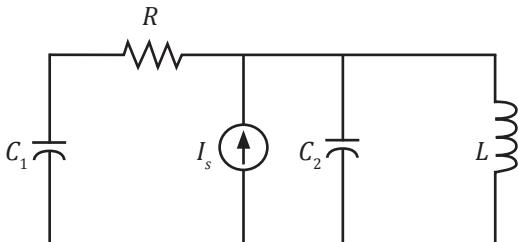
1.2



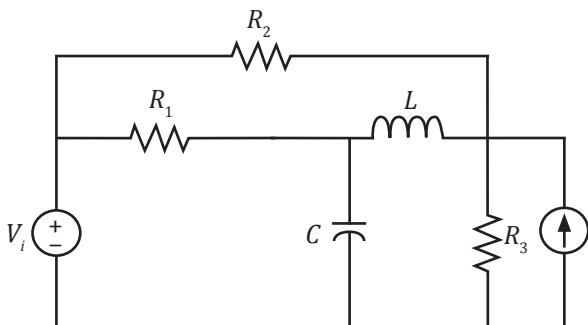
1.3



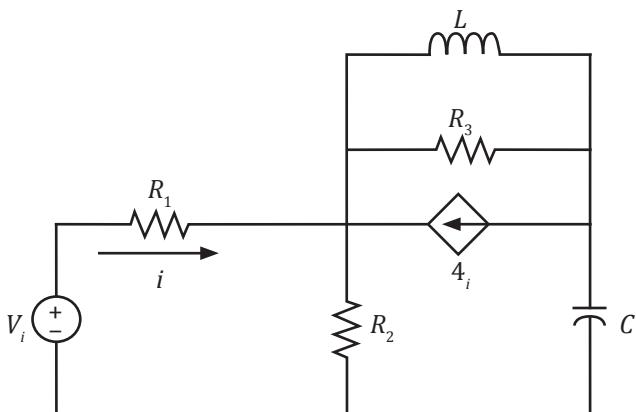
1.4



1.5

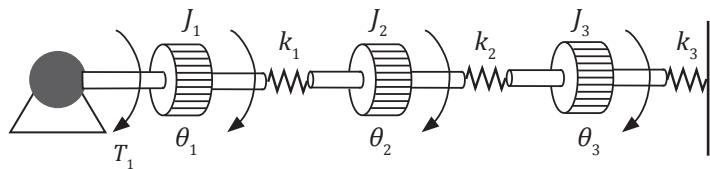


1.6

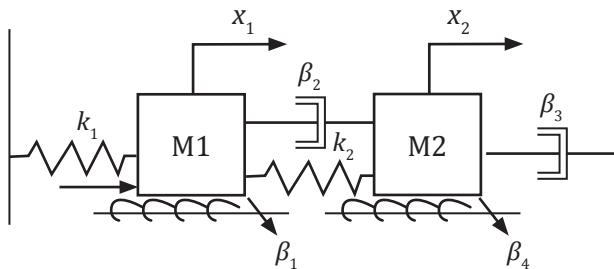


2. Determine la matriz de estado y la ganancia del sistema en los sistemas mecánicos y electromecánicos mostrados a continuación.

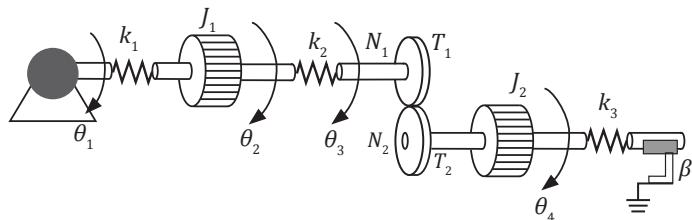
2.1



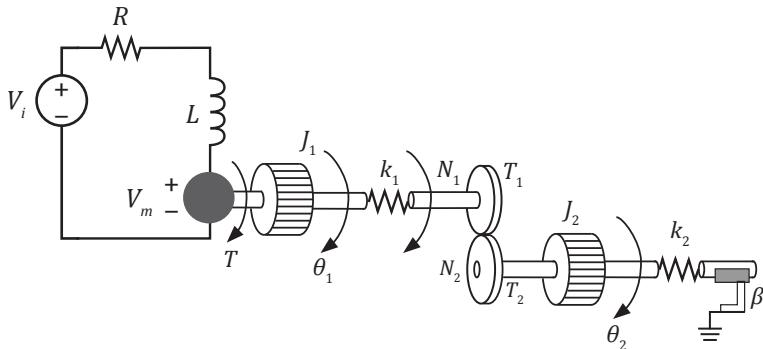
2.2



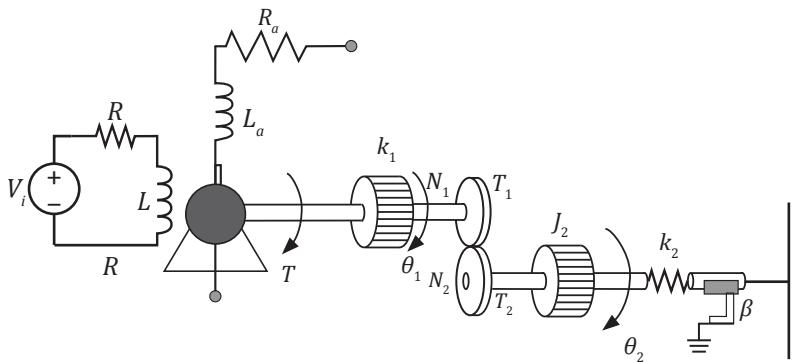
2.3



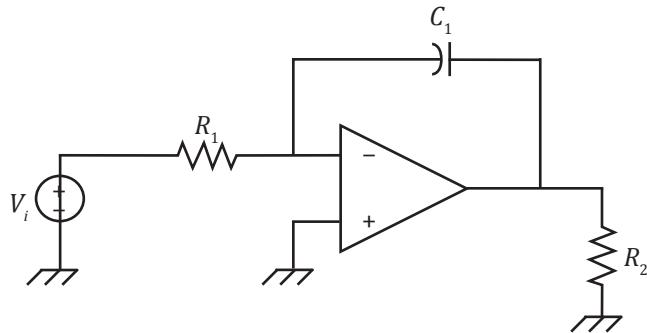
2.4



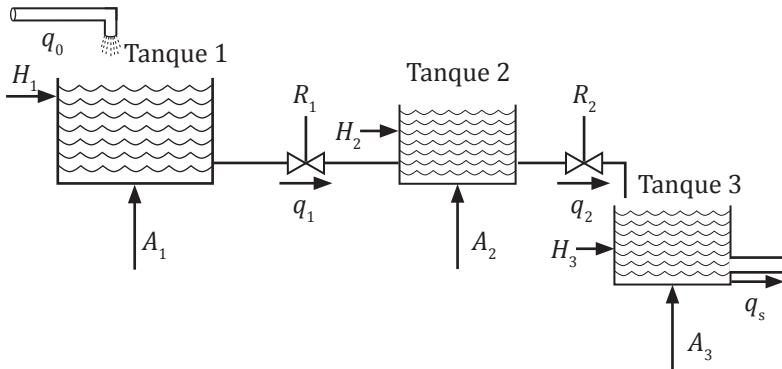
2.5



2.6

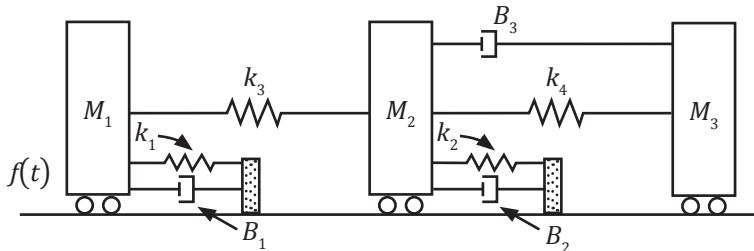


2.7

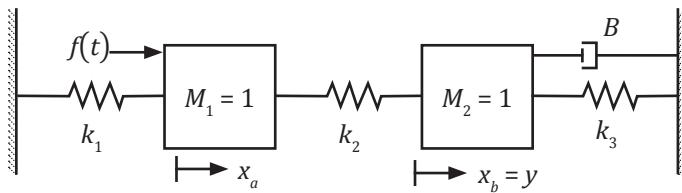


3. Determine el circuito equivalente o analogía eléctrica de los siguientes sistemas mecánicos mostrados.

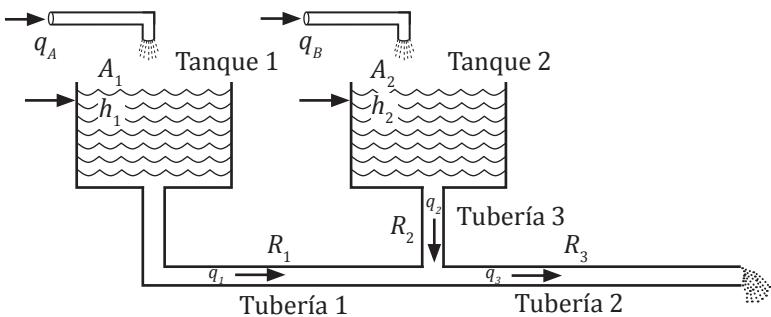
3.1



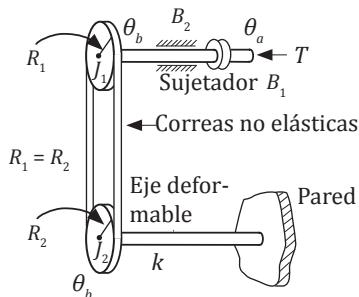
3.2



3.3

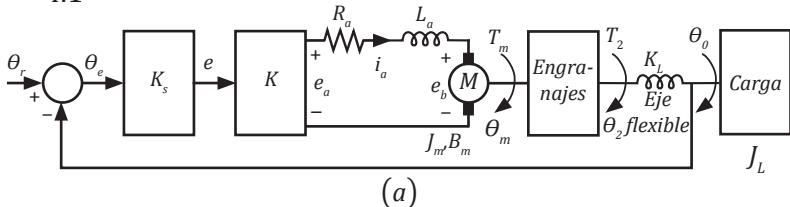


3.4

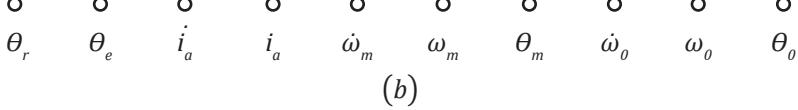


4. Escriba las ecuaciones de estado de los sistemas mostrados a continuación, y luego construya el gráfico de flujo de señal, usando la nomenclatura indicada.

4.1

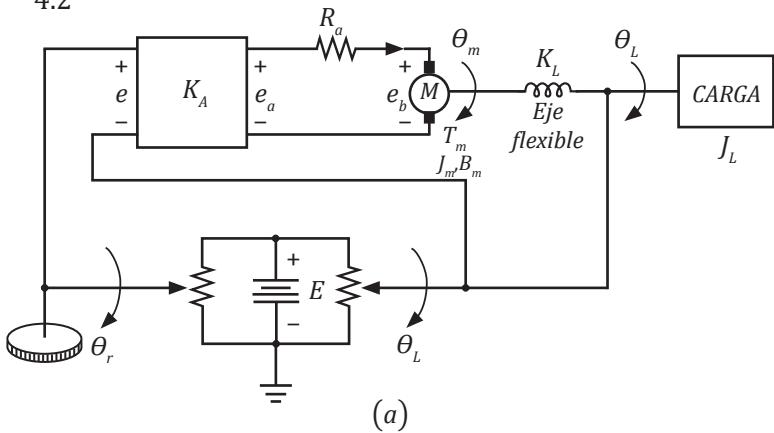


(a)



(b)

4.2



$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \rightarrow \circ \quad \circ \rightarrow \circ \quad \circ \rightarrow \circ$   
 $\theta_r \quad \theta_e \quad e \quad \dot{x}_4 \quad x_4 \quad \dot{x}_3 \quad x_3 \quad \dot{x}_2 \quad x_2 \quad \dot{x}_1$

$(b)$

## REFERENCIAS

1. Barrientos, Antonio, Ricardo, Sanz. **Control de Sistemas Continuos, problemas resuelto.** McGraw-Hill. España, 1996.
2. Bobrow, Leonard. **Análisis de Circuitos Eléctricos.** Editorial Interamericana. 1era. ed. México, 1981
3. D'azzo, John and Houpis, Constantine. **Linear Control System Analysis and Design.** McGraw-Hill, 4ta. ed. New York, 1995.
4. Dorf, Richard and Bishop, Robert. **Sistemas de Control Moderno.** Pearson. 10ma. ed. España, 2006.
5. Dorsey, John. **Sistemas de Control Continuos y Discretos.** McGraw-Hill 1era. ed. México, 2003.
6. Edwards and Penney. **Ecuaciones Diferenciales.** Prentice Hall. 4ta. ed. 2001.
7. Eronini-Umez-Eronini. **Dinámica de Sistemas de Control.** Thomson Learning. México, 2001.
8. Groosman, Stanley and Derrick, William. **Advanced Engineering Mathematics.** Harper and Row. 1ed. 1988.
9. Kamen, Edward. **Introduction to Signals and Systems.** Prentice Hall. 2da. ed. New York, 1990.
10. Kuo, Benjamin and Golnaraghi, Farid. **Automatic Control Systems.** Wyle and Sons. 8va. ed. New York, 2003.
11. Neagle Kent, Saff, Edgard y Snider, Arthur. **Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores de Frontera.** Addison Wesley. 4ta. ed. 2005.
12. Nise, Norman. **Control Systems Engineering.** Wiley & Sons, 4ta. ed. California, 2007.
13. Ogata, Katsuhito. **Ingeniería de Control Moderna.** Pearson. 4ta ed. España, 2002.
14. Phillips, Charles and Harbor. **Royce Feedback Control Systems.** Prentice Hall 3era. ed. 1996.
15. Roberts, M. J. **Señales y Sistemas.** McGraw-Hill, 1era. Ed,

- 2004.
- 16. Thaler, George y Brown, Robert. **Feedback Control Systems**. McGraw-Hill, 2da. ed. 1960.
  - 17. Valencia, Hernán. **Sistemas Automáticos de Control**. Serie Nabla Delta. Universidad Pontificia Bolivariana, 1997.
  - 18. Fongiel M. **Automatic Control Systems**. Robotics, Research and education association. 1er. ed. 2000.
  - 19. Zill, Dennis y Cullen, Michael. **Ecuaciones Diferenciales con valores de frontera**. Thompson Learning, 5ta. ed. 2002.



## **CAPÍTULO 5**

### ***ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO***

#### ***Análisis de variables de estado, respuesta transistoria y estacionaria***

#### ***Introducción***

Un sistema moderno complejo de muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí, resulta ser muy complicado su estudio, razón por la cual para el análisis de los sistemas de este tipo es necesario disminuir la complejidad de las expresiones matemáticas, además se debe recurrir a computadoras que realicen los cálculos. El enfoque de variable de estados es más conveniente desde este punto de vista.

Mientras la teoría de control convencional se basa en la relación entrada-salida o función de transferencia, la teoría de control moderna de control se basa en la descripción de un sistema en términos de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden como lo vimos en el capítulo anterior, en el cual cada sistema se expresaba en forma de matriz de estado, en este capítulo abordaremos los diversos métodos de solución de las matrices de estado para obtener la respuesta del sistema en el tiempo y el análisis de la controlabilidad y la observabilidad de los sistemas de control.

Ahora bien en el capítulo anterior se planteó el primer paso para analizar un sistema de control al obtener un modelo matemático del mismo y su representación de estado. Una vez obtenido, existen varios métodos para el análisis del comportamiento del sistema, frecuentemente es deseable obtener la respuesta en el tiempo de las variables de estado y así examinar el funcionamiento de éste, otro método a considerar en el

análisis del comportamiento del sistema es el uso de señales de prueba, con estas señales de prueba es posible realizar con facilidad análisis matemático y experimental de sistemas de control, éstas son funciones muy simples. Para ello analizaremos la respuesta en el tiempo de un sistema de control compuesto en dos partes, la respuesta transitoria y la respuesta de estado estacionario donde veremos un detallado comportamiento de los sistemas de control.

### **Métodos de solución de la ecuación de variables de estado**

Como vimos en el Capítulo 3 la forma matricial de la ecuación de estado esta definida por:

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \quad y = Cx \quad x(x_0) = D$$

#### **Método de solución matriz de transición de estado**

La respuesta transitoria puede obtenerse fácilmente calculando la solución de la ecuación diferencial de variable de estado, tomando la transformada de Laplace a la ecuación de estado obtenemos:

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s) \quad (69)$$

Por tanto despejando  $x(s)$ :

$$sx(s) - Ax(s) = x(0) + BU(s)$$

$$(sI - A)x(s) = x(0) + BU(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1} * [x(0) + BU(s)] \quad (70)$$

Calculando la transformada inversa de la Laplace, a la ecuación (70) da como resultado:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad (71)$$

donde la función exponencial se define como:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} \quad (72)$$

La ecuación (71) es la solución de la ecuación de estado, por lo tanto si usamos la ecuación (70):

$$x(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} Bu(s) \quad (62)$$

si sacamos factor común obtenemos:

$$\phi(s) = [sI - A]^{-1}, \quad (74)$$

es la transformada de Laplace de la función  $\phi(t) = e^{At}$  esta función matricial describe la respuesta forzada del sistema y se conoce como matriz de transición de estado, por tanto la ecuación puede escribirse:

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad (75)$$

la solución del sistema no forzado cuando  $u(t) = 0$ , sencillamente es  $x(t) = \phi(t)x(0)$  este caso se llama Homogéneo.

### EJEMPLO 1

Sea la matriz de estado o ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t), \quad \mu(t) = 1, t > 0$$

las condiciones iniciales son cero.

**Primer paso:** identificar  $A, B$  y determinar  $[sI - A]^{-1}$ .

$$[sI - A] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix},$$

donde:

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

**Segundo paso:** determinar  $\phi(t)$ .

La matriz de transición de estado puede obtenerse calculando la transformada inversa de Laplace de  $[sI - A]^{-1}$ , por lo cual

tenemos:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

**Tercer paso:** determinar  $x(t)$  usando la fórmula (75).

$$x(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-t} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau,$$

El primer término se anula porque las condiciones iniciales son cero, luego de realizar los productos indicados y calcular la integral sencilla obtenemos:

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}, t \geq 0,$$

esto implica

$$x_1(t) = 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t}, x_2(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

respectivamente.

### Método de solución de matriz A diagonalizada

El caso particular cuando la matriz A solo tiene elementos en la diagonal principal, entonces podemos aplicar la ecuación (71) de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & . & 0 & \\ 0 & \dots & . & a_{nn} & \end{bmatrix} \Rightarrow x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} Bu(\tau) dt,$$

Esta ecuación se podrá aplicar siempre y cuando la matriz A

esté diagonalizada.

### EJEMPLO 2

Sea la matriz de estado, determine la solución del sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \mu(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicamos directamente la fórmula para calcular  $x_1(t), x_2(t)$ .

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 5e^{-t} + \int_0^t 2e^{-2(t-\tau)} d\tau = 5e^{-t} + 2e^{-\tau} \int_0^t e^\tau d\tau = 5e^{-t} + 2 \\ &\quad - 2e^{-\tau} \Rightarrow x_1(t) = 3e^{-t} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t} + \int_0^t 3e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} + 3e^{-2t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau = e^{-2t} + \frac{3}{2} \\ &\quad - \frac{3}{2}e^{-2t} \Rightarrow x_2(t) = -\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

### Método de solución de la transformada de Laplace

Si tomamos la ecuación (70), podemos establecer que la solución de la ecuación estado estará dada por;  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}(x(0) + Bu(s))]$ , donde  $I$  es la matriz unidad y  $\phi(s) = (sI - A)^{-1}$  es la matriz de transición de estado.

### EJEMPLO 3

Sea la matriz de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mu(t) = 1, t \geq 0$$

Determine la solución del sistema.

**Primer paso:** hallar  $[sI - A]^{-1}$ .

$$[sI - A] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

**Segundo paso:** hallar  $[x(0) + Bu(s)]$ .

$$[x(0) + Bu(s)] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2s+1}{s} \end{bmatrix}$$

**Tercer paso:** hallar  $x(s)$ .

$$x(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2s+1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 17s + 6}{s(s+2)(s+3)} \\ \frac{2s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$x_1(s) = \frac{s^2 + 17s + 6}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+3)}$$

$$x_2(s) = \frac{2s}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+3)}$$

**Cuarto paso:** hallar  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , aplicando la transformada inversa de Laplace a  $x_1(s)$ ,  $x_2(s)$ .

Luego de aplicar el método de fracciones parciales para determinar las constantes y usar la transformada inversa de Laplace tenemos:

$$x_1(s) = 1 + 12e^{-2t} - 12e^{-3t}$$

$$x_2(s) = -4e^{-2t} + 6e^{-3t}$$

### Método de diagonalización o vectores característicos

El método consiste en la aplicación de una transformación lineal, obtener una ecuación de estado con matriz A diagonalizada y resolver la nueva ecuación estado por el método de matriz A diagonalizada analizado en este capítulo. Seguidamente, realizar la transformación inversa para encontrar la solución de la ecuación original, para ello cambiamos el vector de estado  $x$  por  $z$  y la transformación lineal será  $V$ .

$$x = Vz \quad \text{y} \quad \dot{x} = V\dot{z}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\dot{x} = Ax + Bu(t)$$

obtenemos,

$$V\dot{z} = AVx + Bu(t)$$

Despejando a  $\dot{z}$ :

$$\dot{z} = V^{-1}AVz + V^{-1}Bu(t) = \Lambda z + Eu(t) \quad (76)$$

Se puede apreciar que esta transformación lineal aplicada al vector  $x$ , cambia el sistema original con variables,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  a un nuevo sistema con variables de estado  $x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_{n'}$ , la solución de este nuevo sistema se consigue muy fácilmente usando el método descrito en la página 154 y siguientes, luego podemos aplicar la transformación lineal a esas variables  $x = Vz$ , para encontrar la solución de las variables originales. Para efectos de encontrar el vector  $V$ , debemos utilizar los procedimientos usados en ingeniería para determinar el valor de  $\lambda$  de un sistema de ecuaciones homogéneo.

$$(\lambda - a_{11}) - a_{12}U_2 - \dots - a_{1n}U_n = 0$$

$$-a_{12}U_1 + (\lambda - a_2)U_2 - \dots - a_{2n}U_n = 0$$

.

.

.

$$-a_{n1}U_1 - a_{n2}U_2 \dots (\lambda - a_n)U_n$$

Para una solución no trivial, la forma vectorial se tiene:

$$(\lambda I - A)V = 0 \quad (77)$$

Para  $V$  tenga solución no trivial será necesario y suficiente que cumpla,

$$\text{Det}(\lambda I - A)V = 0 \quad (78)$$

Se llama polinomio característico de  $A$  y  $\lambda$  se le llaman valores característicos que satisface la ecuación:

$$[\lambda I - A]V = 0 \quad (79)$$

Se le denomina Vector característico.

#### EJEMPLO 4

Sea la matriz de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determine la solución del sistema.

**Primer paso:** determinar los valores característicos.

$$\text{Det}(\lambda I - A)V = \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

De donde se obtiene:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

**Segundo paso:** hallar el vector característico  $V$ .

Para  $\lambda_1 = -1$ , usamos  $[\lambda I - A]V = 0$ .

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = 0, \quad V_{11} = -V_{12}$$

para ello tomamos un valor arbitrario,  $V_{12} = -1 \Rightarrow V_{11} = 1$ , enton-

ces,

$$\text{el vector } V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Análogamente procedemos para  $\lambda_2 = -2$ .

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix} = 0, \quad V_{22} = -2V_{21},$$

para ello tomamos un valor arbitrario para

$$V_{21} = 1, \Rightarrow V_{22} = -2$$

Entonces en vector  $V$  queda definido:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

podemos calcular fácilmente,

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Tercer paso:** diagonalizar la matriz de estado.

Usamos la ecuación (65) nos queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu(t) \quad z(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nos queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad z(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**Cuarto paso:** determinar la solución de la matriz diagonalizada  $z_1(t), z_2(t)$

Aplicamos el método desarrollado el **Método de solución de la transformada de Laplace** (pág. 153 y siguientes).

$$x_1(t) = 3e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = 3e^{-t} + 1e^{-\tau} = 1 + 2e^{-t}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -2e^{-t} + \int_0^t (-e^{-2(t-\tau)}) d\tau \\ &= -2e^{-2t} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-2t} \end{aligned}$$

**Quinto paso:** hallar la solución de la matriz original.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 2e^{-t} \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

la solución queda definida:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-2t}$$

$$x_2(t) = -2e^{-t} + 3e^{-2t}$$

### Método de solución interpolación de Sylvester

Para aplicar el método de interpolación de Sylvestre para calcular  $e^{At}$ , es necesario enunciar el teorema de Cayley-Hamilton.

#### Teorema de Cayley-Hamilton

Sea una matriz  $n \times n$  y su ecuación característica,  $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$  la matriz A satisface su propia ecuación característica  $A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nI = 0$ .

Ahora bien utilizando la fórmula de interpolación de Sylvester, se demuestra que  $e^{At}$  se obtiene la ecuación determinante siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{m-1} & e^{\lambda_2 t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \dots & \dots & e^{\lambda_m t} \\ I & A & A^2 & \dots & A^{m-1} & \dots e^{At} \end{bmatrix} = 0 \quad (80)$$

Luego al despejar  $e^{At}$  nos queda:

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1} \quad (81)$$

Para determinar los valores de  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, \dots, m-1$ , se debe resolver el sistema de  $m$  ecuaciones para  $\alpha_k(t)$  de la forma

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} = e^{\lambda_1 t} \quad (82)$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_2^{m-1} = e^{\lambda_2 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_3 + \alpha_2(t)\lambda_3^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_3^{m-1} = e^{\lambda_3 t}$$

.....

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} = e^{\lambda_m t}$$

### EJEMPLO 5

Sea la matriz de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine la solución del sistema.

**Primer paso:** determinar los valores característicos.

$\text{Det}[\lambda I - A] = 0$ ,  $\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$  la ecuación característica nos queda:

$$\lambda(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$$

**Segundo paso:** hallar  $\alpha_0(t), \alpha_1(t)$  porque el sistema es 2x2.

Usando la ecuación (71):

$$\alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \lambda_2 \alpha_1(t) = e^{\lambda_2 t}$$

Sustituyendo los valores de  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$  tenemos:

$$\alpha_0(t) = 1$$

$$\alpha_0(t) + \lambda_2 \alpha_1(t) = e^{-2t}, \quad \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) = e^{-2t}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\alpha_0(t) = 1, \alpha_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

**Tercer paso:** hallar  $e^{At}$ .

Usando la ecuación (81), hallamos  $e^{At}$ .

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A = I + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} = \phi(t)$$

**Cuarto paso:** luego de hallar  $\phi(t)$ , hallamos la solución del sistema  $x_1(t), x_2(t)$ .

Para hallar la solución del sistema se debe usar la ecuación (75).

$$x(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} (1 - e^{-2(t-\tau)}) \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

Nos queda:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (1 - e^{-2(t-\tau)}) \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2t}}{4} \right) \\ 1 - e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De donde,

$$x_1(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} t + \frac{e^{-2t}}{4}$$

$$x_1(t) = 1 - e^{-2t}$$

### **Controlabilidad y observabilidad**

**Controlabilidad:** se dice que un proceso es completamente controlable si cada variable de estado del proceso a ser controlado alcanza un objetivo en un intervalo finito de tiempo por una señal de control sin restricciones  $u(t)$ . El significado de controlabilidad de un sistema establece que si el sistema es controlable en un tiempo  $t_0$  para un estado inicial  $x(t_0)$  y si se puede transferir este estado a cualquier otro estado  $x(t_1)$  mediante un vector de control sin restricciones para un intervalo finito, entonces podemos decir que el sistema es controlable.

Considérese un sistema lineal invariante en el tiempo descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(x)\end{aligned}\tag{83}$$

Donde  $A, B, C$  y  $D$  son matrices de coeficientes con dimensiones apropiadas.

#### *Teorema de controlabilidad*

Consideremos la solución de la ecuación de estado:

$$x(t) = e^{-At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Si aplicamos la definición de controlabilidad del estado recién establecida, se tiene que:

$$x(t_1) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau = 0$$

Y despejando  $x(0)$ :

$$x(0) = - \int_0^{t_1} e^{At} Bu(\tau) d\tau$$

Podemos escribir  $e^{At}$  como:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k$$

Como se ha visto en las secciones anteriores se obtiene:

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau$$

Y se define,

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k$$

Entonces,

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k$$

Si el sistema es completamente controlable entonces debe satisfacer:

$$x(0) = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \dots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

De este análisis se puede concluir la condición de controlabilidad para el sistema descrito por la ecuación (83) es completamente controlable si y sólo si los vectores  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ , sean linealmente independientes y la matriz de controlabilidad  $S$  es de rango es  $n$ :

$$S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \dots \ A^{n-1}B] \quad (84)$$

Finalmente afirmamos que si la matriz  $S$  (matriz de controlabilidad) no es singular entonces el sistema es controlable.

#### EJEMPLO 6

Sea el sistema descrito:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para este caso:

$$S = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

para probar que la matriz  $S$  no es singular bastará con que su determinante sea diferente de cero,  $\text{Det}(S) \neq 0$  entonces si calculamos el determinante del sistema dado:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 0 - 2 = -2 \Rightarrow \text{Det}(S) \neq 0,$$

podemos concluir que el sistema es controlable.

### Controlabilidad a la salida de un sistema

Para diseñar un sistema de control se puede necesitar controlar la salida en lugar del estado del sistema, la controlabilidad de estado no es condición necesaria ni suficiente para controlar la salida del sistema.

Para sistemas descritos por la ecuación (83), se puede demostrar que la condición de controlabilidad completa a la salida del sistema es posible sólo si se puede construir el vector de control que transfiera la salida inicial  $y(t_0)$  a cualquier salida final  $y(t)$  en un intervalo de tiempo finito, el sistema es completamente controlable a la salida si la matriz  $[CB \quad CAB \quad CA^2B \dots \quad CA^{n-1}B \quad D]$  es de rango  $m$ , matriz no singular, la demostración puede hacerse haciendo las mismas consideraciones para la controlabilidad total y se deja al lector como ejercicio.

**Observabilidad:** se dice que un sistema es completamente observable si el estado  $x(t_0)$  se determina a partir de la observación de  $y(t)$  durante un intervalo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ , el sistema es completamente observable si todas las transiciones de estado afectan eventualmente a todos y cada una de las variables de salidas o al vector de salida.

### Teorema de observabilidad

Para el sistema descrito por la ecuación (83) cuya solución es:

$$x(t) = e^{-At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Y la salida es:

$$y(t) = Ce^{-At} x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + DU(t)$$

Si consideramos el vector de salida para sistemas homogé-

neos para hacer el análisis más sencillo cuya salida es:

$$y(t) = Ce^{-At} x(0)$$

Se tiene que:

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k$$

Se obtiene:

$$y(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) CA^k x(0)$$

El sistema es completamente observable si cumple con la condición necesaria y suficiente para la matriz de observabilidad  $V$ , cuyo rango es  $n$ , no es singular y tiene la siguiente forma:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (85)$$

También puede escribirse la ecuación (74).

$$V = [C^t \ C^t \ A^t \dots \ C^t (A^t)^{n-1}]$$

Entonces se dice que el sistema es totalmente observable si la matriz  $V$  no es singular, implica que el  $\text{Det}(V) \neq 0$ .

### EJEMPLO 7

Sea el sistema descrito:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t), \quad y = [1 \ 0] \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine si es observable.

Entonces,

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Det}(V) \\ &= \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 0 = 0, \text{Det}(V) = 0 \end{aligned}$$

podemos concluir que el sistema no es observable, la matriz  $V$  es singular.

### Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria

Una vez conocida la respuesta en el tiempo de un sistema (cualquier sistema) por los métodos estudiados anteriormente, determinamos que la misma está compuesta por dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta de estado estacionario, por lo tanto, la respuesta se puede escribir como:

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t) \quad (86)$$

La respuesta transitoria  $y_{tr}(t)$  se define como la parte de la respuesta en el tiempo que va desde el estado inicial hasta un estado final en el que tiende a cero cuando ha pasado un tiempo muy largo. De manera que  $y_{tr}(t)$  tiene la propiedad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0 \quad (87)$$

La respuesta de estado estacionario es la parte de la respuesta total del sistema que permanece o se mantiene en el tiempo, luego que la respuesta transitoria ha desaparecido. De manera que la respuesta de estado estacionaria puede variar sólo sobre un patrón fijo.

El control de la respuesta transitoria es necesariamente importante, porque significa que es la parte del comportamiento dinámico del sistema y representa la desviación entre la respuesta de salida y la entrada o la respuesta deseada, antes que

el estado estable sea alcanzado, ésta debe ser inmediatamente controlada porque puede causar problemas o afectar negativamente el comportamiento del sistema.

La respuesta de estado estacionario de un sistema de control es también muy importante, ésta indica el estado de equilibrio del sistema cuando el tiempo se hace muy largo. Cuando un sistema de control opera, la respuesta estacionaria es comparada con una señal de referencia o señal deseada. En general, si la respuesta de estado estacionaria de la salida del sistema no concuerda con la señal de referencia o con la señal deseada, el sistema expresa que tiene un error de estado estacionario.

### Error de estado estacionario

Como mencionamos en la explicación de la respuesta de estado estacionario, la diferencia que existe entre la señal de salida y la señal de referencia lo definimos como el error de estado estacionario, por esta razón la respuesta de estado estacionario rara vez concuerda con la señal de referencia o deseada. Por lo tanto, los errores de estado estacionario en los sistemas de control son casi inevitables, éste es problema a considerar en el diseño de los sistemas de control, uno de los objetivos es reducir el error de estado estacionario al mínimo o mantenerlo en un valor tolerable, al mismo tiempo la respuesta transitoria debe satisfacer el conjunto de especificaciones.

Los requerimientos de precisión en los sistemas de control dependen en gran extensión de los objetivos del sistema de control.

El análisis de errores de estado estacionario es ilustrado en Figura n° 56 donde se muestra el diagrama de bloque de un sistema de control realimentado (Lazo cerrado) donde  $r(t)$  es la entrada del sistema y  $y(t)$  es la salida del sistema. El error del sistema queda definido como:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (88)$$

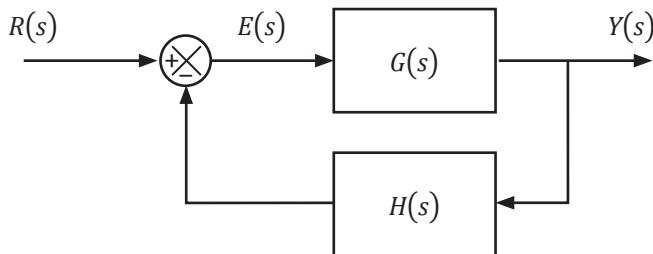


Fig. 56. Modelo de sistema de control realimentado.

El error de estado estacionario es definido como:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (89)$$

Usando el teorema de valor final de transformada de la Laplace, la ecuación (89) puede ser escrita como:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (90)$$

Ahora analizaremos la Figura n° 56 para determinar la función error  $E(s)$ , con la cual podemos determinar el error en función de los elementos del modelo de sistema de control realimentado en el dominio de  $s$ , seguidamente aplicamos la propiedad de la transformada de Laplace usando la ecuación (90) la cual detallamos.

Por definición  $Y(s) = G(s)E(s)$  y  $E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$ , si combinamos las ecuaciones, obtenemos:

$$Y(s) = \frac{R(s) - E(s)}{H(s)},$$

además  $R(s) - E(s) = G(s)E(s)H(s)$ , despejando  $E(s)$ , nos queda:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (91)$$

ecuación general de error,

Entonces el error de estado estacionario queda definido:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (92)$$

Queda muy claro que  $e_{ss}$  depende de  $G(s)$ , más específicamente, podemos mostrar que  $e_{ss}$  depende del número de polos de  $G(s)$ , para  $s = 0$ , este número se conoce como el tipo de sistema de control o sencillamente el tipo.

### Cálculo del error de estado estacionario para tipos de sistemas de control

Para realizar el análisis matemático del error de estado estacionario es necesario utilizar señales de entrada de prueba para la respuesta en el tiempo de los sistemas de control, estas señales son pulso unitario  $\mu(t)$ , rampa  $t\mu(t)$  y parabólica:

$$\frac{t^2}{2} \mu(t)$$

#### Caso n° 1

Cálculo de error de estado estacionario cuando la entrada es un pulso unitario  $r(t) = \mu(t)$  definida como:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Sabemos que la transformada de la Laplace de la entrada  $r(t) = \mu(t)$  es:

$$R(s) = \frac{1}{s}, \text{ entonces usando la ecuación (92) tenemos:}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s}}{1 + G(s)H(s)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}$$

Si llamamos  $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$ , entonces el error de estado estacionario es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + k_p}$$

La representación típica cuando la entrada es un pulso unitario  $\mu(t)$  cuando  $k_p$  es finita y diferente de cero se muestra en la Figura n° 57.

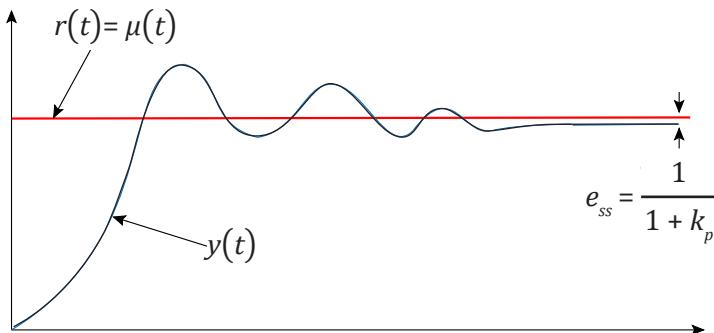


Fig. 57. Error típico de estado estacionario para  $r(t) = \mu(t)$ .

Cuando en un sistema tiene una señal de entrada pulso unitario, si se puede determinar el valor de la constante  $k_p$  y ésta es diferente de cero, entonces para las entradas de prueba rampa  $r(t) = t\mu(t)$  y parabólica:

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \mu(t),$$

el error de estado estacionario  $e_{ss} = 0$ , por lo tanto podemos resumir que el error de estado estacionario para una entrada pulso unitario tiene la siguiente característica:

$$\text{Sistema TIPO 0} \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + k_p}$$

$$\text{Sistema TIPO 1 o Mayores} \quad e_{ss} = 0$$

### Caso n° 2

Cálculo de error de estado estacionario cuando la entrada es una rampa  $r(t) = t\mu(t)$ .

Análogamente al caso anterior, la transformada de Laplace de la entrada es:

$$R(s) = \frac{1}{s^2}, \text{ entonces usando la ecuación (81) tenemos:}$$

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}, \end{aligned}$$

si hacemos

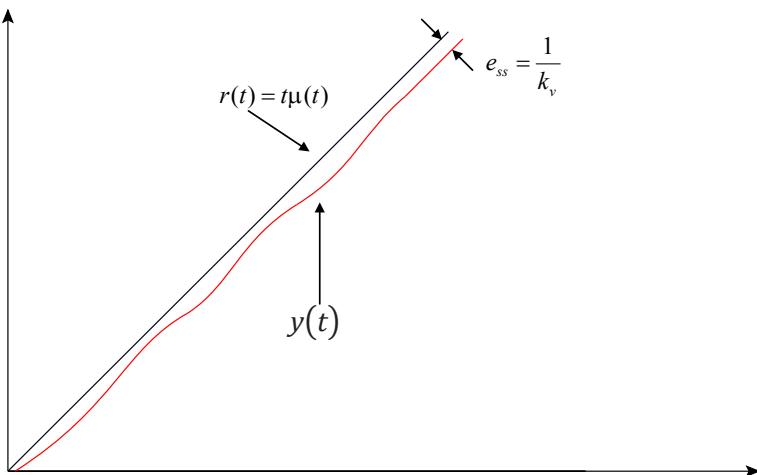
$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$$

Y el error de estado estacionario es:

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v}$$

La representación típica cuando la entrada es una rampa  $t\mu(t)$  cuando  $k_v$  es finita y diferente de cero se muestra en la Figura n° 58.

Análogamente al primer caso, concluimos que si en un sistema donde la señal de entrada es una rampa, podemos calcu-



**Fig. 58. Error típico de estado estacionario para  $r(t) = \mu(t)$ .**

lar  $k_v$  y ésta es diferente de cero, entonces para las entradas de prueba rampa  $r(t) = \mu(t)$  y parabólica:

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \mu(t),$$

el error de estado estacionario  $e_{ss} = \infty$  y  $e_{ss} = 0$  respectivamente, entonces el error de estado estacionario tiene la siguiente característica:

Sistema TIPO 0	$e_{ss} = \infty$
Sistema TIPO 1	$e_{ss} = \frac{1}{k_v}$
Sistema TIPO 2	$e_{ss} = 0$

### Caso n° 3

Cálculo de error de estado estacionario cuando la entrada es una parábola:

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \mu(t).$$

Siguiendo el procedimiento, la transformada de Laplace:

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \mu(t),$$

entonces usando la ecuación (92) tenemos:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s^3}}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)}, \end{aligned}$$

Si hacemos  $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$  y el error de estado estacionario es:

$$e_{ss} = \frac{1}{k_a}$$

La representación típica cuando la entrada es una parábola:

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \mu(t).$$

cuando  $k_a$  es finita y diferente de cero se muestra en la Figura n° 59.

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \mu(t)$$

Luego de analizar este caso, concluimos que si en un sistema donde la señal de entrada es una parábola, podemos calcular  $k_a$  y ésta es diferente de cero, entonces para las entradas de prueba rampa  $r(t) = \mu(t)$  y parabólica  $r(t) = \mu(t)$  el error de estado estacionario es para ambos casos  $e_{ss} = \infty$  entonces el error de estado estacionario tiene la siguiente característica:

$$\text{Sistema TIPO 0} \quad e_{ss} = \infty$$

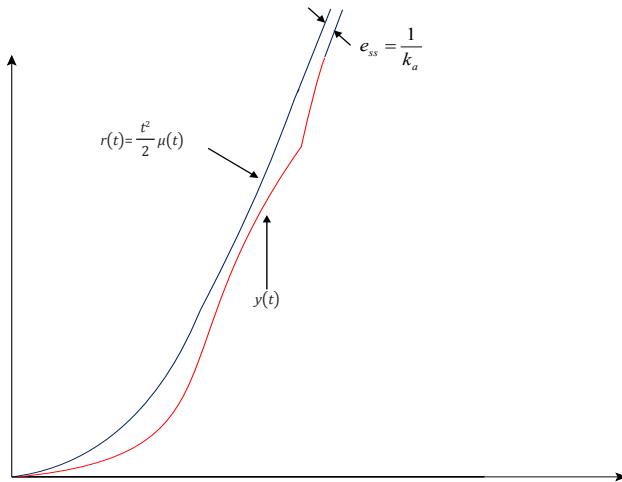


Fig. 59. Error típico de estado estacionario para  $r(t) = \frac{t^2}{2} \mu(t)$ .

*Sistema TIPO 1*       $e_{ss} = \infty$

*Sistema TIPO 2*       $e_{ss} = \frac{1}{k_a}$

La siguiente Tabla nº 2 resume los errores de estado estacionario para señales de entradas pulso, rampa y parábola.

Tabla 2

Tipo de sistema	Constantes de error			$e_{ss}$ Entrada de señal pulso	$e_{ss}$ Entrada de señal rampa	$e_{ss}$ Entrada señal parabólica
0	$k_p$	0	0	$\frac{1}{1 + k_a}$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	$k_v$	0	0	$\frac{1}{k_v}$	$\infty$

**Tabla 2. (continuación)**

Tipo de sistema	Constantes de error			$e_{ss}$ Entrada de señal pulso	$e_{ss}$ Entrada de señal rampa	$e_{ss}$ Entrada señal parabólica
2	$\infty$	$\infty$	$k_a$	0	0	$\frac{1}{k_a}$
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	0

**EJEMPLO 8**

Determine las constantes de error estado estacionario para las señales de prueba, pulso, rampa y parábola:

$$\frac{t^2}{2} \mu(t)$$

para sistema de control realimentado cuyas funciones de transferencias de lazo abierto son dadas a continuación:

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 2)}, \quad H(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

**Primer paso:** hallar las constantes  $k_p$ ,  $k_v$  y  $k_a$ .

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s^2 + s + 2)(s + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) \Rightarrow k_v = 0$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) \Rightarrow k_a = 0$$

**Segundo paso:** calcular los errores de estado estacionario.

$$\text{Sistema Tipo 0 ess} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Sistema Tipo 1} \quad e_{ss} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{Sistema Tipo 2} \quad e_{ss} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ahora que sabemos calcular los errores sobre las respuestas de salida de un sistema, nos abocaremos a analizar la respuesta en el tiempo de sistemas de primer y segundo orden observando su desempeño y características de comportamiento.

### Respuesta en el tiempo de sistemas de primer orden

Un sistema de primer orden tiene una relación de entrada-salida (ganancia) siguiente:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts}, \quad (93)$$

esto implica que el modelo estándar para este tipo de sistema tiene la forma mostrada en el diagrama de bloque con realimentación unitaria en la Figura n° 60.

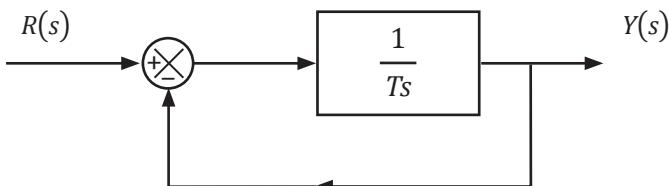


Fig. 60. Diagrama de bloque de un sistema de primer orden.

Si despejamos la salida de la ecuación (93) obtenemos:

$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1},$$

suponemos las condiciones iniciales cero, conociendo la señal de entrada  $r(t)$  podemos determinar el comportamiento y respuesta en el tiempo del sistema, para explicar este proceso tomaremos una señal de prueba conocida, la función pulso, aunque pudiéramos tomar cualquiera, por simplicidad hacemos esta elección, sea  $r(t) = \mu(t)$ , sabemos que:

$$R(s) = \frac{1}{s},$$

entonces,

$$Y(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)},$$

si buscamos la transformada inversa de Laplace de  $Y(s)$ , tenemos:

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \text{ para } t \geq 0$$

Si aplicamos la definición de error y usamos la ecuación (88) tenemos:

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - y(t) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = e^{-\frac{t}{T}} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{T}} \\ e(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{T}} = 0 \end{aligned}$$

Ahora vamos a demostrar que usando la ecuación (90) nos da el mismo resultado, aplicamos el teorema de valor final para determinar el error de estado estacionario:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{Ts}} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

Observamos que la respuesta en ambos casos es la misma, la gráfica del comportamiento del sistema en la Figura n° 61.

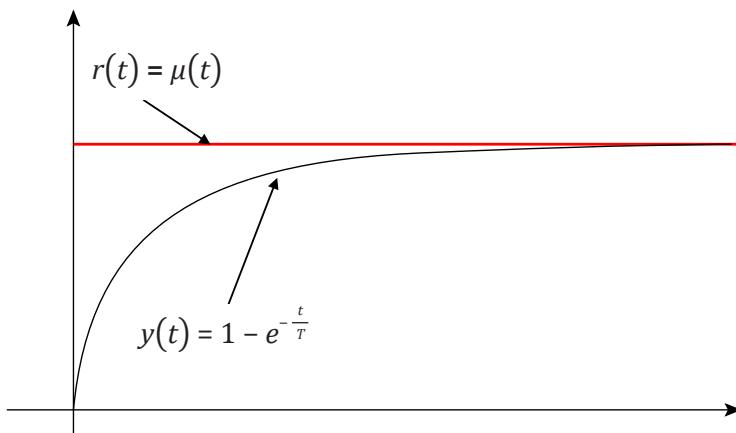


Fig. 61. Gráfica de la respuesta en el tiempo.

En conclusión observamos que la respuesta del sistema depende de las características de la señal de entrada.

### Respuesta en el tiempo de sistemas de segundo orden

Un sistema de segundo orden tiene una función de transferencia de la forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (94)$$

Esta ecuación es llamada la forma estándar de la función de transferencia de un sistema de segundo orden, donde  $\zeta$  es definido como la razón de amortiguación y es adimensional y  $\omega_n$  representa la frecuencia natural del sistema, la Figura n° 62

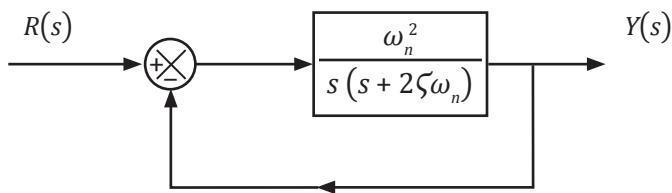


Fig. 62. Modelo de sistema de segundo orden.

muestra el modelo en diagrama de bloques de un sistema de control en de segundo orden.

La ecuación característica del modelo de segundo orden la representa el denominador de la ecuación (83) igualada a cero:

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = 0 \quad (95)$$

Para una entrada pulso unitario, donde:

$$R(s) = \frac{1}{s},$$

la respuesta de salida se obtiene de buscar la transformada inversa de Laplace a la salida:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)},$$

el resultado que obtenemos es:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \cos^{-1}(\zeta)) \quad t \geq 0 \quad (96)$$

Los efectos de los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$  en la respuesta del modelo de segundo orden  $y(t)$ , la estudiaremos referidas a las raíces de la ecuación característica, donde:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n (\sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (97)$$

Los efectos de la ecuación característica en la amortiguación de un sistema de segundo orden, mientras la razón de amorti-

guación varía desde  $-\infty$  a  $\infty$  la frecuencia natural permanece constante, la siguiente clasificación de los sistemas dinámicos con respecto a los valores de  $\zeta$  queda expresado.

*Sub-amortiguado:*

$$0 < \zeta < 1: \quad s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n (\sqrt{1 - \zeta^2}) \quad -\zeta\omega_n < 0$$

*Críticamente amortiguado:*

$$\zeta = 1 \quad s_1, s_2 = -\omega_n$$

*Sobre amortiguado:*

$$\zeta = 1 \quad s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n (\sqrt{1 - \zeta^2})$$

*Sin amortiguamiento:*

$$\zeta = 0: \quad s_1, s_2 = \pm j\omega_n$$

*Negativamente amortiguado:*

$$\zeta < 0: \quad s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n (\sqrt{1 - \zeta^2}) \quad -\zeta\omega_n < 0$$

En aplicaciones prácticas, sólo los sistemas estables son los que corresponden a  $\zeta > 0$  y éstos son los de interés, tomando como entrada una señal pulso unitario mostramos a continuación en la Figura n° 63 la respuesta del sistema en función del tiempo normalizado  $\omega_n t$  para varios valores de la razón amortiguamiento. Como vemos, la respuesta se hace más oscilatoria a medida que decrece  $\zeta$ . Cuando  $\zeta \geq 1$  la respuesta no presenta sobrepaso, esto quiere decir que  $y(t)$  nunca excede al valor de referencia durante la respuesta transitoria.

En muchos casos prácticos las características de desempeño deseadas en los sistemas de control se expresan en funciones en el dominio del tiempo. Por ejemplo, los sistemas que almacenan energía no responden instantáneamente y presentan respuestas transitorias cada vez más sujetas a entradas indeseadas o perturbaciones.

Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta tran-

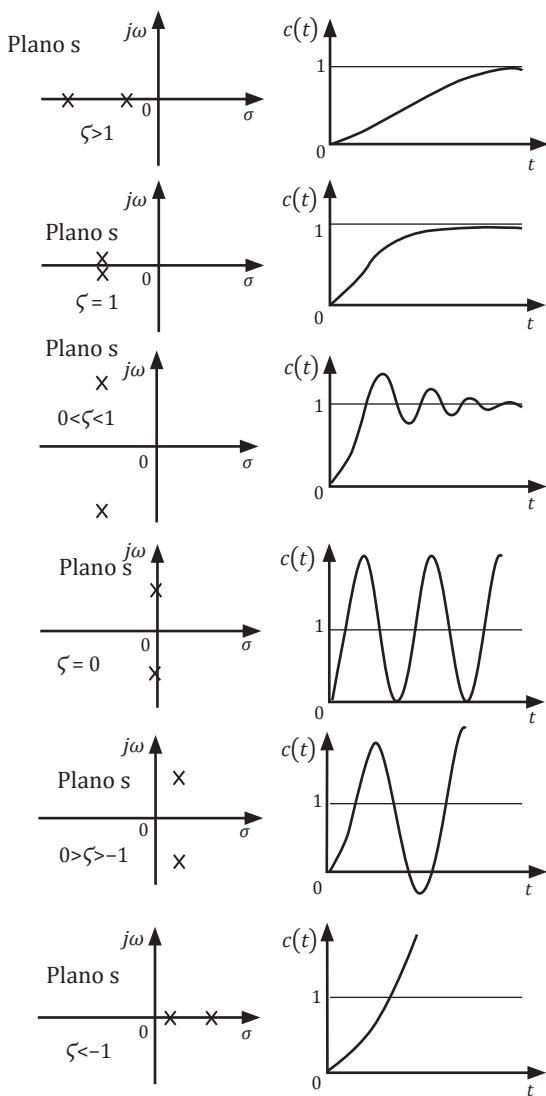


Fig. 52. Comparación de las respuestas en el tiempo para valores diferentes de  $\zeta$ .

sitoria para una entrada de escalón unitario, puesto que ésta es muy fácil de generar y es suficientemente drástica.

La respuesta transitoria de un sistema para una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales, por conveniencia al comparar las respuestas transitorias de varios sistemas, es muy práctico usar la condición inicial cero (sistemas en reposo), por lo cual todas las salidas y todas las derivadas con respecto al tiempo son cero. De este modo las características de respuesta se comparan con facilidad.

En la práctica la respuesta transitoria de un sistema de control muestra con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario. Al especificar esta característica para una entrada escalón unitario, es común definir los parámetros mostrados en la Figura n° 53 para su estudio.

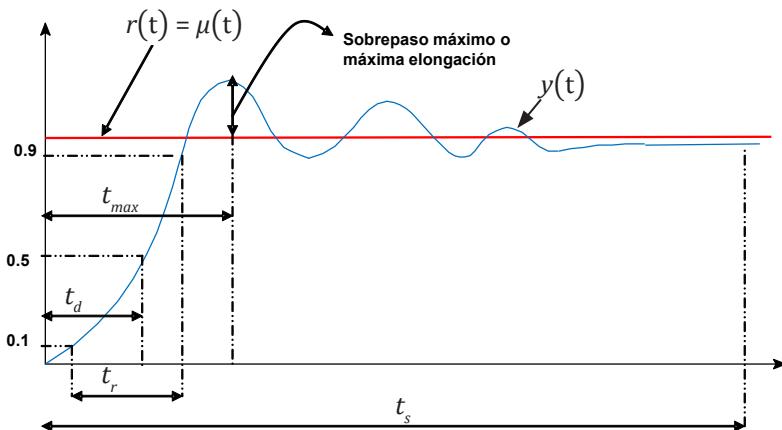


Fig. 64. Respuesta de un sistema de control segundo orden con entrada escalón unitario.

$t_d$ : tiempo de retardo.

$t_r$ : tiempo de levantamiento o subida.

$t_{max}$ : tiempo máximo.

$t_s$ : tiempo de establecimiento o asentamiento.

$S_p$ : sobrepaso máximo.

Ahora estableceremos las ecuaciones que relacionan estos parámetros en la respuesta transitoria:

### **Sobrepaso máximo**

Se maximiza la ecuación (96).

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \left( \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1}(\zeta) \right) t \geq 0$$

Utilizando la derivación, allí encontramos  $t_{\max}$  y luego la sustituimos encontramos:

$$S_p = e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (98)$$

### **Tiempo máximo**

Se encuentra al maximizar la función  $y(t)$  y obtenemos:

$$t_{\max} = \omega_n \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (99)$$

### **Tiempo de retardo**

Se hace un estudio aproximado de la curva de la ecuación  $y(t)$  en un intervalo  $0 < \zeta < 1$ , donde determinamos que el tiempo de retardo es aproximadamente:

$$t_d = \frac{1 + 0.7\zeta}{\omega_n}, \quad (100)$$

más aproximadamente:

$$t_d = \frac{1.1 + 0.125\zeta + 0.469\zeta^2}{\omega_n}$$

### **Tiempo de levantamiento**

Análogamente al tiempo de retardo se hace una aproximación en un rango  $0 < \zeta < 1$ , donde encontramos:

$$t_r = \frac{0.8 + 2.5\zeta}{\omega_n}, \quad (101)$$

más aproximadamente:

$$t_r = \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n}$$

### Tiempo de establecimiento

La aproximación que se hace para valores  $\zeta < 0.69$ .

$$t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} \quad (102)$$

### EJEMPLO 8

El diagrama de bloque mostrado en la Figura n° 65, determine las constantes de error para entradas pulso, rampa y parabólica, la señal de error es definida  $e(t)$ , además determine el error de estado estacionario en términos de  $k$  y  $k_t$ , luego determine los valores de  $k$  y  $k_t$  si el sobrepaso máximo es 4.3% y el tiempo de levantamiento es 0.2 seg; use las ecuaciones de (98) hasta (91) para realizar los cálculos.

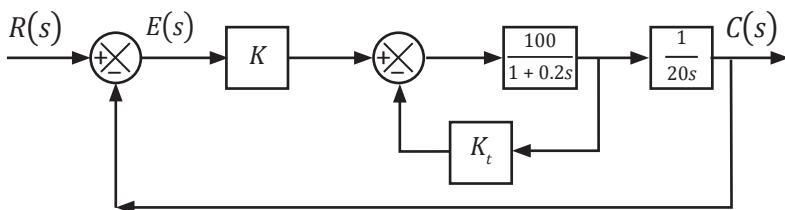
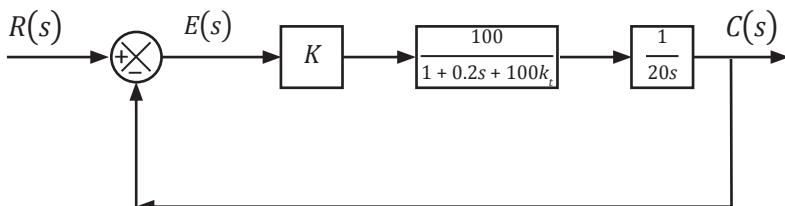
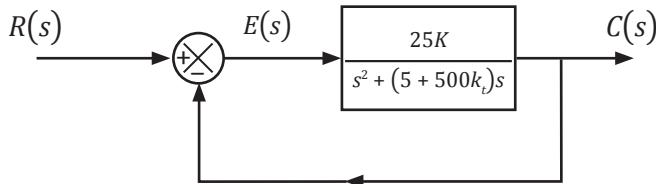


Fig. 65. Diagrama de bloque del Ejemplo 8.

**Primer paso:** simplificar el diagrama de bloque a la forma del modelo de realimentación clásico.



Luego,



Ahora sí podemos aplicar las fórmulas de las constantes de error, para:

$$G(s) = \frac{25K}{s^2 + (5 + 500k_t)s} \text{ y } H(s) = 1$$

**Segundo paso:** aplicar las fórmulas de las constantes  $k_p$ ,  $k_v$ ,  $k_a$ , para las entradas pulso, rampa y parábola.

*Sistema Tipo 0*

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{25K}{s^2 + (5 + 500k_t)s} = \infty \quad e_{ss} = 0$$

*Sistema Tipo 1*

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{25K}{s(s + 5 + 500k_t)} \right)$$

$$= \frac{25K}{s + 5 + 500k_t}, \quad e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{s + 5 + 500k_t}{25K}$$

*Sistema Tipo 2*

$$k_a = 0, \quad e_{ss} = \infty$$

**Tercer paso:** determinar los valores de  $\zeta$  y  $\omega_n$ .

Los datos que tenemos son  $S_p = 0.043$  y  $t_r = 0.2\text{seg}$ , usando las ecuaciones (98) y (101) tenemos:

$$0.043 = e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \ln(0.043) = -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}};$$

$$-3.1465 = -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow (3.1465)^2 = \frac{(\pi\zeta)^2}{1-\zeta^2};$$

$$9.9 = \frac{9.869604 \zeta^2}{1 - \zeta^2} \Rightarrow 9.9 - 9.9\zeta^2 = 9.869604\zeta^2.$$

de donde  $9.9 = 19.769604\zeta^2$ .

$$\zeta^2 = \frac{9.9}{19.769604} = 0.49923 \Rightarrow \zeta = 0.706.$$

Ahora con ese valor buscamos  $\omega_n$ :

$$t_r = \frac{0.8 + 2.5\zeta}{\omega_n} \Rightarrow 0.2 = \frac{0.8 + 2.5(0.706)}{\omega_n} \text{ de donde:}$$

$$\omega_n = \frac{0.8 + 1.76}{0.2} = 12.825$$

**Cuarto paso:** construir el modelo de respuesta en el tiempo de segundo orden.

$$\begin{aligned} G_T(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}, = \frac{C(s)}{R(s)} \\ &= \frac{(12.825)^2}{s^2 + 2(0.706)s + (12.825)^2} \\ &= \frac{164.4806}{s^2 + 18.10s + 164.4806} \end{aligned}$$

Comparamos este modelo con el modelo obtenido en el primer paso.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25K}{s^2 + (5 + 500k_t)s + 25K'}$$

comparando término a término y despejamos:

$$25K = 164.4806 \Rightarrow k = \frac{164.4806}{25} = 6.57$$

$$k = 6.57$$

$$5 + 500k_t = 18.10 \Rightarrow k_t = \frac{18.10 - 5}{500} = 0.0162$$

$$k_t = 0.0162$$

### ***Controladores automáticos industriales***

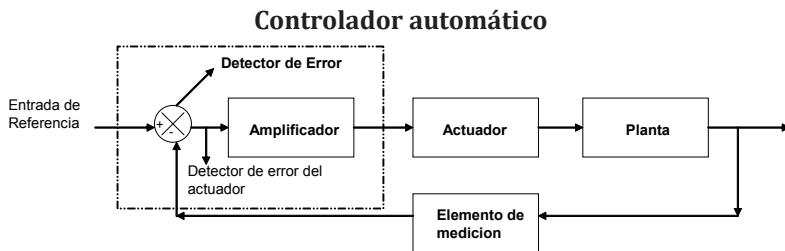
La función del controlador automático es comparar el valor real de la salida de la planta con el valor deseado, con el objeto de minimizar los errores en los sistemas de control, como vimos en los sistemas estudiados en el Capítulo 1, el controlador determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un valor pequeño, la forma en que el controlador produce la señal se llama acción de control.

A continuación describiremos las acciones de control fundamentales usadas comúnmente en controladores automáticos industriales.

Las acciones de control que desempeñan los controladores automáticos industriales consisten en minimizar los errores de desempeño y mantener el sistema dentro de los parámetros deseados de operación, los más comunes son: El de dos posiciones encendido y apagado, proporcional, integral y derivativo. Es importante comprender las propiedades básicas de las acciones de control, con el objeto que se pueda seleccionar el controlador más adecuado, cuando se haga un análisis de un sistema en

particular.

Veamos la Figura n° 66 donde se muestra un diagrama de bloques de un sistema de control industrial, el cual consta de un controlador automático, un actuador, una planta y un elemento de medición.



**Fig. 66. Diagrama de bloques de un sistema de control industrial.**

El controlador detecta la señal de error actuante, la cual usualmente está en el nivel más bajo de potencia y la amplifica a un nivel suficientemente alto.

El actuador es un elemento que produce una señal a la entrada de la planta de acuerdo con la señal de control, de modo que la señal de realimentación corresponda a la señal de entrada.

El elemento de medición es un dispositivo que convierte la variable de salida en otra variable, tal como desplazamiento, presión o voltaje, la cual puede usarse para comparar la salida con la señal de entrada.

### **Controlador de dos posiciones o de encendido-apagado**

El control de dos posiciones o de encendido-apagado es muy barato y sencillo por lo cual es muy usado en la industria; supongamos que la salida del controlador es  $b(t)$  y la señal de error  $e(t)$ , la señal del controlador  $b(t)$  permanece en un valor máximo o mínimo, dependiendo de que la señal de error del actuador sea positiva o negativa, de modo que si  $e(t)$  es menor que cero, entonces pasa a un estado y si es positiva pasa a otro estado, generalmente el estado que pasa el controlador cuando la señal es negativa es cero, veamos el diagrama de bloque en la Figura n° 67.

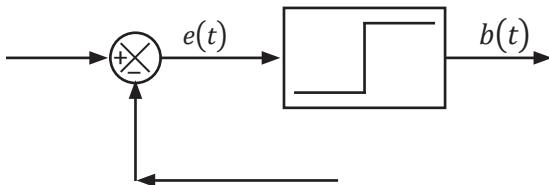


Fig. 67. Controlador de dos posiciones.

### Controlador proporcional

El controlador mostrado en la Figura n° 68 su acción de control definida en la relación ecuación (92).

$$G_c = \frac{b(s)}{E(s)} = k_p, \quad (103)$$

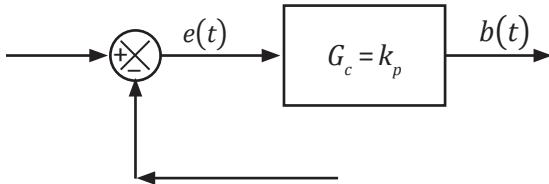


Fig. 68. Controlador proporcional.

se llama ganancia proporcional, para el caso de sistemas de segundo orden, el controlador responde de manera proporcional a la señal de error, el error de estado estacionario se reduce si se incrementa el valor de la ganancia; sin embargo, esto haría que la respuesta fuera más oscilatoria.

### Controlador derivativo

El controlador mostrado en la Figura n° 69 análogamente al anterior tiene una relación en la ecuación (104), éste responde muy bien a la razón de cambio de velocidad del error y produce una corrección de error antes que la magnitud de error sea demasiado grande.

$$G_c = \frac{b(s)}{E(s)} = sk_p \quad (104)$$

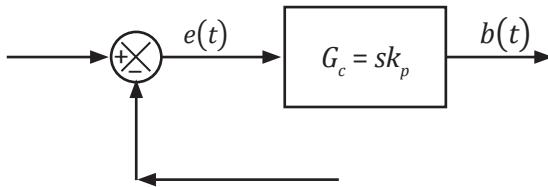


Fig. 69. Controlador derivativo.

### Controlador integral

El controlador mostrado en la Figura n° 70 análogamente al anterior tiene una relación mostrada en la ecuación (105), éste controlador elimina el error en estado estacionario en respuesta al escalón unitario. Ésta es una mejora importante al controlador proporcional que produce un offset (error de estado estacionario en presencia del controlador proporcional) esto se observa colocándolo en un sistema de primer orden.

$$G_c = \frac{b(s)}{E(s)} = \frac{k_p}{s} \quad (105)$$

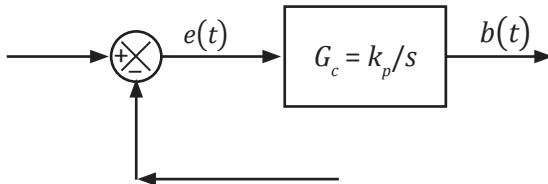


Fig. 70. Controlador integral.

### Controladores combinados

Con el objeto de mejorar su desempeño se usan también controladores combinando los anteriormente, ellos se llaman:

#### Controladores proporcionales integrales

Cuya relación de ganancia dada por:

$$G_c = \frac{b(s)}{E(s)} = k_p \left( \frac{1}{sT} + 1 \right); \text{ como vemos en la Figura n° 60.}$$

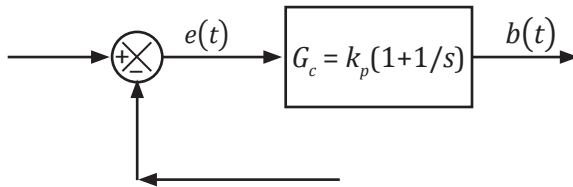


Fig. 71. Controlador proporcional integral.

### Controladores proporcionales integrales derivativos (PID)

Cuya relación de ganancia esta dada por:

$$G_c = \frac{b(s)}{E(s)} = k_p \left( \frac{1}{sT} + s + 1 \right); \text{ como vemos en la Figura n}^{\circ} 72.$$

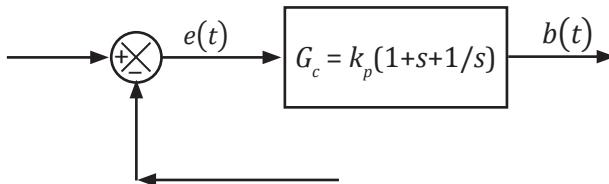


Fig. 72. Controlador proporcional Integral derivativo.

Para el análisis de estos controladores sólo se debe aplicar el mismo procedimiento desarrollado en el ejemplo n° 8, donde se resolvió el caso cuando el controlador es proporcional colocando en el bloque  $G_c$  una constante llamada  $K$  y donde determinamos su valor de 6.57.

#### EJEMPLO 9

Sea el sistema de primer orden mostrado en la Figura n° 73.a. Determinar el error de estado estacionario si la entrada es un pulso unitario para un controlador proporcional y luego

usando un controlador integral y comparar los resultados.

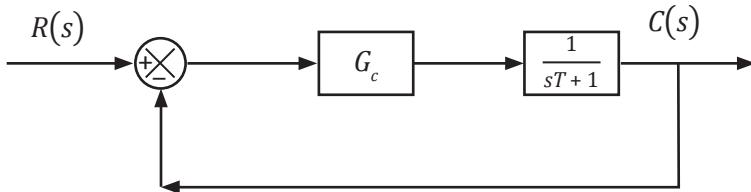


Fig. 73.a. Modelo de sistema de control.

**Primer paso:** calcular el error de estado estacionario.

Usando el procedimiento del Ejemplo 8, si  $G_c = K$  y tenemos que  $r(t) = \mu(t)$  tenemos:

$$R(s) = \frac{1}{s} \text{ y}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{C(s)} = \frac{R(s)}{1 + \frac{K}{Ts + 1}} = \frac{sT + 1}{s(sT + K + 1)},$$

usando el teorema de valor final y la ecuación n° 92.

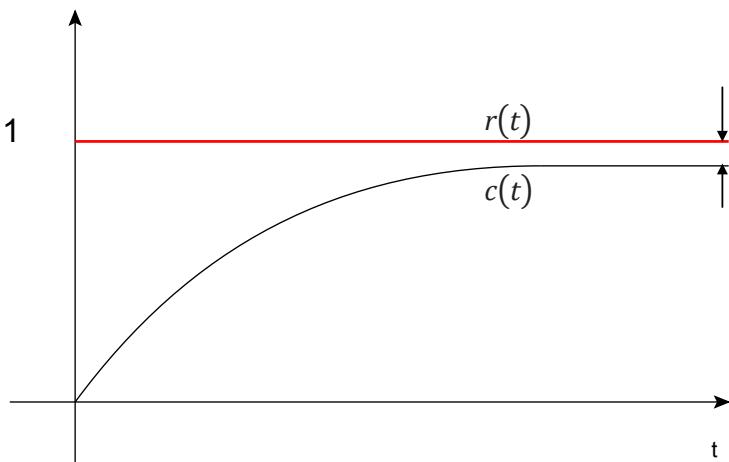
$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{sT + 1}{s(sT + K + 1)} \right) = \frac{1}{K + 1}$$

La respuesta en el tiempo se dibuja en la Figura n° 73.b.

**Segundo paso:** resolver el mismo problema pero ahora con

$$G_c = \frac{K}{s} \text{ y } r(t) = \mu(t); \text{ tenemos } R(s) = \frac{1}{s} \text{ y}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{C(s)} = \frac{R(s)}{1 + \frac{K}{s(Ts + 1)}} = \frac{s(sT + 1)}{s(s^2T + s + K)},$$



**Figura 73.b. Respuesta a un pulso unitario y el error offset.**

usando el teorema de valor final y la ecuación (92).

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{s(sT + 1)}{s(s^2T + K + s)} \right) = 0$$

Este controlador elimina el error que había con el controlador proporcional, lo que representa una mejora importante respecto al controlador anterior.

### **Sensibilidad en los sistemas de control realimentados**

El concepto de sensibilidad es de primordial importancia en los sistemas de control, un sistema realimentado percibe el cambio en la salida debido a los cambios del proceso e intenta corregir la salida.

La sensibilidad del sistema se define como la relación del cambio porcentual en la función de transferencia del sistema respecto al cambio porcentual en la función de transferencia del proceso (parámetro del sistema). La función de transferencia del proceso para un cambio incremental pequeño la definiremos para este caso como:

$$G_t(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}, \quad (106)$$

por tanto la sensibilidad se define

$$S = \frac{\Delta G_t / G_t(s)}{\Delta G / G(s)}, \quad (107)$$

si tomamos el límite para cambios pequeños la ecuación queda:

$$S_{G_t} = \frac{\partial G_t(s) / G_t(s)}{\partial G(s) / G(s)} \quad (108)$$

#### EJEMPLO 10

Sea el sistema mostrado en la Figura n° 74, determine la sensibilidad respecto a  $K$ , si se tiene un controlador proporcional  $G_c = k_p$  y la función de transferencia de la planta.

$$G = \frac{K}{s + 0.1} = G(s)$$

La función de transferencia del sistema es:

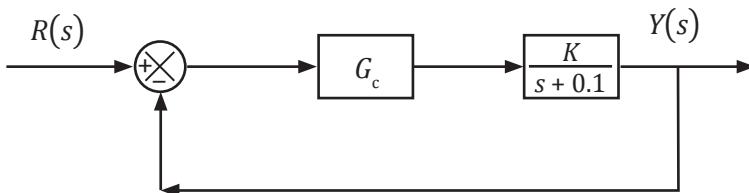


Fig. 74. Sistema de realimentación unitaria del ejemplo n° 10.

$$G_t(s) = \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c} = \frac{\frac{Kk_p}{s + 0.1}}{1 + \frac{Kk_p}{s + 0.1}} = \frac{Kk_p}{s + 0.1 + Kk_p},$$

entonces la sensibilidad respecto a  $K$ :

$$\begin{aligned} S_K^{G_t} &= \frac{\partial G_t}{\partial K} \frac{K}{G_t} = \frac{K}{G_t} \frac{k_p(s + 0.1 + k_p K) - k_p^2 K}{(s + 0.1 + Kk_p)^2} \\ &= \frac{K(k_p s + 0.1 + k_p)}{(s + 0.1 + Kk_p)^2} = \frac{(s + 0.1 + Kk_p)}{Kk_p} \\ S_K^{G_t} &= \frac{(s + 0.1)}{(s + 0.1 + Kk_p)} \end{aligned}$$

A medida que  $K$  se hace grande, la sensibilidad tiende a cero y a medida que  $K$  se hace pequeña la sensibilidad tiende a la unidad y los cambios de  $K$  afectan directamente a la respuesta de salida. Por lo tanto, se deben usar componentes en la planta que no varíen con los cambios de ambiente u otros factores, para que puedan mantenerse constantes.

### ***Respuesta transitoria y estacionaria usando Matlab***

Respuesta del sistema para una entrada pulso unitario.

Veamos el ejemplo:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.2 + 1)}$$

```
> num=[ 0  1  0];
> den=[1  0.2  1];
> step(nun,den)
```

(Ver Figura n° 75)

Para una entrada rampa unitaria, sólo se cambia:

```
>> r=t;
>> y=lsim(nun,den,r,t);
>> plot(t,y)
```

(Ver Figura n° 76)

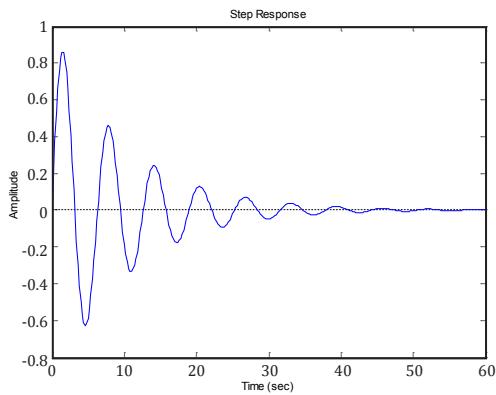


Fig. 75. Respuesta del sistema usando Matlab.

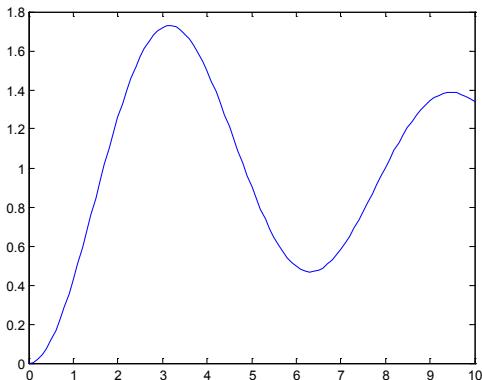


Fig. 76. Respuesta del sistema a una rampa unitaria.

## PROBLEMAS

1. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones de estado, usando el métodos desarrollados en **Métodos de solución de la ecuación de variables de estado.**

1.1

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ \mu(t) \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.3

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \mu(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.4

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones de estado (espacios de estado), usando el método de diagonalización o de vectores característicos.

2.1

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2.2

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.3

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mu(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Para las siguientes matrices de los coeficientes determine la controlabilidad y la observabilidad.

3.1

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3.3

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

3.4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Determine el tipo de sistema, para los sistemas de realimentación unitaria cuyas funciones de transferencias son dadas a continuación.

$$4.1 \quad G(s) = \frac{k}{(s+1)(1+10s)+(1+20s)}$$

$$4.2 \quad G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+5)+(s+6)}$$

$$4.3 \quad G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+5s+5)}$$

$$4.4 \quad G(s) = \frac{10e^{-0.2s}}{(s+1)(1+10s)+(1+20s)}$$

$$4.5 \quad G(s) = \frac{10(s-1)}{s^2(s+5)+(s+6)^2}$$

5. Las siguientes funciones de transferencias son de sistemas realimentados. Determine el error de estado estable para entradas pulso unitario, rampa y parábola  $\frac{t}{2}\mu(t)$ .

$$5.1 \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2} \quad H(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

$$5.2 \quad G(s) = \frac{1}{s(s + 5)} \quad H(s) = 5$$

$$5.3 \quad G(s) = \frac{1}{s^2(s + 10)} \quad H(s) = \frac{s + 1}{s + 2}$$

$$5.4 \quad G(s) = \frac{s + 4}{s^4 + 16s^3 + 48s^2 + 4s + 4} \quad H(s) = \frac{10}{s + 5}$$

6. Para los diagramas de bloques mostrados a continuación, determine el error de estado estacionario en términos de las constantes  $K$  y  $K_r$ , así mismo determine  $e(t)$  cuando  $y = r(t) = t\mu(t)$  y  $e(t)$  para  $r(t) = 0$  y  $n(t) = \mu(t)$ .

6.1

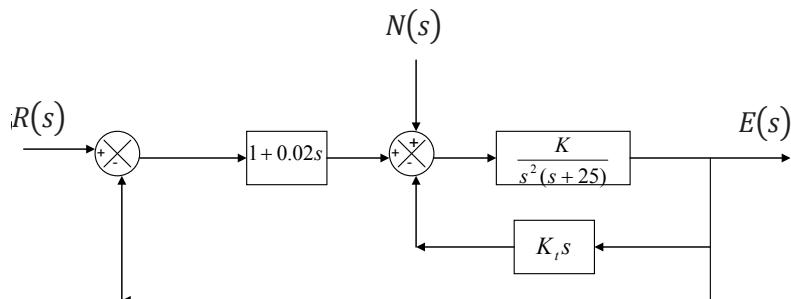


Figura del problema N° 6.1.

6.2

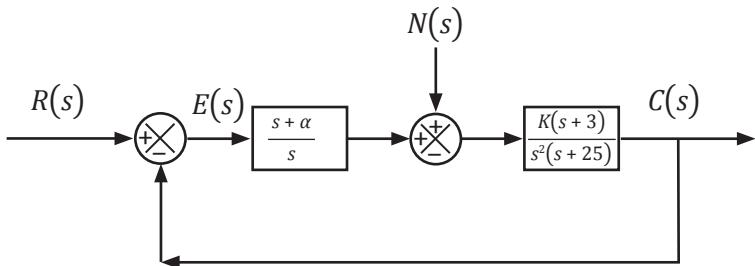


Figura del problema N° 6.2

7. Determine en cada caso el modelo de respuesta del sistema de segundo orden; para ello encuentre  $\zeta$  y  $\omega_n$ .

$$7.1 \quad S_p = 10\% \text{ y } t_d = 0,05 \text{ seg.}$$

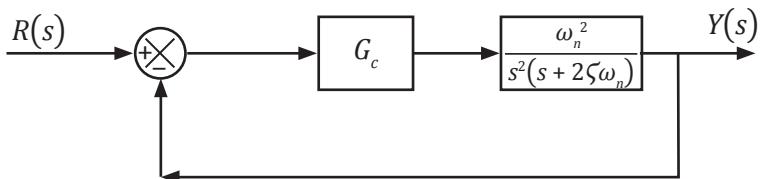
$$7.2 \quad S_p = 20\% \text{ y } t_d = 0,01 \text{ seg.}$$

$$7.3 \quad S_p = 10\% \text{ y } t_s = 0,01 \text{ seg.}$$

$$7.4 \quad S_p = 4\% \text{ y } t_r = 0,05 \text{ seg.}$$

$$7.5 \quad S_p = 15\% \text{ y } t_r = 0,08 \text{ seg.}$$

8. Para el sistema mostrado a continuación:



Determine el error de estado estacionario para cuando  $G_c$  sea:

$$8.1 \quad G_c = k_p$$

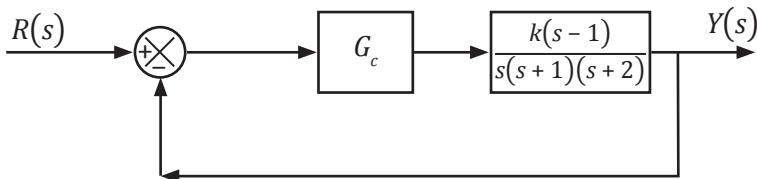
$$8.2 \quad G_c = \frac{k_p}{s}$$

$$8.3 \quad G_c = sk_p$$

$$8.4 \quad G_c = k_p \left( 1 + s + \frac{1}{s} \right)$$

$$8.5 \quad G_c = k_p \left( 1 + \frac{1}{s} \right)$$

9. Repita el problema n° 8 para el sistema mostrado a continuación:



## REFERENCIAS

1. Barrientos, Antonio y Ricardo, Sanz. **Control de Sistemas Continuos, problemas resueltos.** McGraw-Hill, España, 1996.
2. D'azzo, John and Houpis, Constantine. **Linear Control System Analysis and Design.** McGraw-Hill, 4ta. ed. New York, 1995.
3. Dorf, Richard and Bishop, Robert. **Sistemas de Control Moderno:** Pearson. 10ma. ed. España, 2006.
4. Dorsey, John. **Sistemas de Control Continuos y Discretos.** McGraw-Hill. 1era. ed. México, 2003.
5. Eronini-Umez-Eronini. **Dinámica de Sistemas de Control:** Thomson Learning, México, 2001.
6. Kamen, Edward. **Introduction to Signals and Systems.** Prentice Hall. 2da. ed. New York, 1990.
7. Kuo, Benjamin and Golnaraghi, Farid. **Automatic Control Systems.** Wyle and Sons. 8va. ed. New York, 2003.
8. Nise, Norman. **Control Systems Engineering.** Wiley & Sons. 4ta. ed. California, 2007.
9. Ogata, Katsuhito. **Ingeniería de Control Moderna.** Pearson. 4ta. ed. España, 2002.
10. Phillips, Charles and Harbor. **Royce: Feedback Control Systems.** Prentice Hall. 3era. ed. 1996.
11. Rodriguez, Maulio. **Análisis Moderno de Redes Eléctricas.** Universidad del Zulia (Ediluz), 1era. ed. 1986.
12. Thaler, George y Brown, Robert. **Feedback Control Systems.** McGraw-Hill, 2da. ed. 1960
13. Valencia, Hernán. **Sistemas Automáticos de Control.** Serie Nabla Delta, Universidad Pontificia Bolivariana, 1997.
14. Fongiel, M. **Automatic Control Systems, Robotics.** Research and education association. 1era. ed. 2000.



## **CAPÍTULO 6**

### **ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS DE CONTROL**

#### ***Introducción***

Desde los estudios de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, aprendimos que la solución homogénea corresponde a la respuesta transitoria de un sistema y ésta depende de las raíces de la ecuación característica. Básicamente, el diseño de un sistema de control podría ser considerado como un problema de arreglo en la ubicación de los polos y ceros en la función de transferencia, tal que el sistema se desempeñará de acuerdo con las especificaciones preestablecidas.

Entre muchas formas de especificaciones de desempeño usadas en el diseño de sistemas de control, el más importante requerimiento es que el sistema debe ser estable. Un sistema inestable es generalmente considerado inútil.

Al diseñar un sistema de control, se debe ser capaz de predecir el comportamiento dinámico a partir del conocimiento de sus componentes. La característica mas importante del comportamiento dinámico de un sistema de control, es la estabilidad absoluta, es decir si un sistema es estable o inestable; un sistema de control está en equilibrio, si en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante en el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial.

Un sistema de control lineal e invariante en el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones en la salida continúan en

forma indefinida. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial.

En realidad la salida de un sistema físico puede aumentar hasta un cierto grado, pero puede estar limitado por detenciones mecánicas o el sistema puede colapsarse o volverse no lineal una vez que la salida excede cierta magnitud por lo cual ya no se aplicarían las ecuaciones diferenciales lineales.

A parte de la estabilidad absoluta se debe considerar cuidadosamente la estabilidad relativa, ésta representa la medida cuantitativa de la rapidez con que la respuesta transitoria tiende a cero. Cuanto menor sea el tiempo en estabilizarse la respuesta, el sistema es más estable relativamente.

Por las razones anteriormente expuestas en este capítulo estudiaremos el concepto de estabilidad y los métodos para determinar la estabilidad de un sistema.

### **Concepto de estabilidad**

Antes de definir la estabilidad de un sistema, haremos una breve explicación de la relación de la ecuación característica con los polos y ceros, veamos el modelo del sistema de control en la Figura n° 77, donde la ganancia del sistema es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

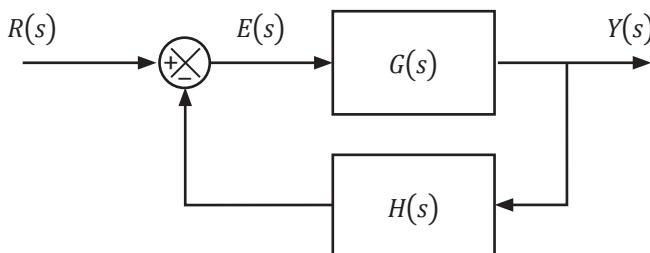


Fig. 77. Modelo de sistema de control realimentado.

La ecuación característica queda definida como:

$$f(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \quad G(s)H(s) = \frac{KQ(s)}{P(s)} \Rightarrow \\ f(s) = P(s) + KQ(s) = 0, \quad (109)$$

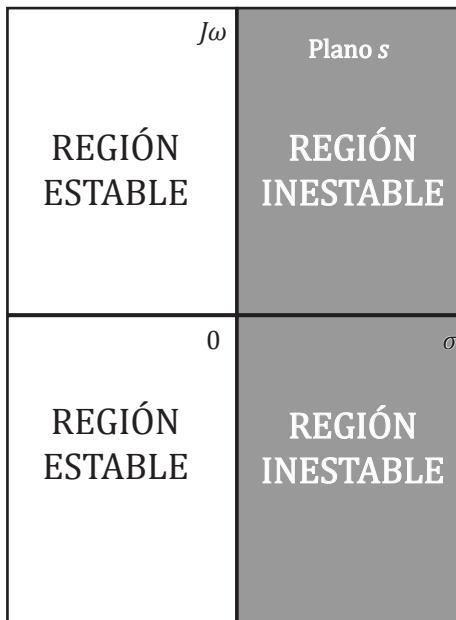
donde  $Q(s)$  es un polinomio de grado  $n$  de la ecuación característica en  $s$  y sus raíces son llamadas ceros,  $P(s)$  es un polinomio de grado  $m$  y sus raíces son llamadas polos, el cual analizaremos con detalle a continuación.

Un sistema lineal invariante en el tiempo es estable si:

- a. Ante una entrada acotada responde con una salida acotada.
- b. Si todos los polos de la función de transferencia están en el semiplano negativo de  $s$ , es decir, tienen la parte real negativa.

La localización de polos de un sistema en el plano  $s$  representa la respuesta transitoria resultante. Los polos en el plano derecho de  $s$  dan como resultado una respuesta decreciente para entradas de perturbación. Análogamente, los polos en eje  $j\omega$  y en el plano derecho de  $s$  dan como resultado una respuesta neutral y otra creciente, respectivamente, para una entrada de perturbación, por tal razón la zona de estabilidad de un sistema dinámico es el semiplano izquierdo del plano de  $s$ .

Por esto la condición necesaria y suficiente para que un sistema realimentado sea estable es que todos los polos de la función de transferencia del sistema tengan partes reales negativas, ubicados en el semiplano izquierdo de  $s$ , si la ecuación característica tiene raíces simples sobre el eje  $j\omega$  con respecto a las raíces del lado izquierdo del plano, el sistema se denomina marginalmente estable, así mismo para que un sistema realimentado sea inestable bastará que la ecuación característica tenga al menos una raíz en el lado derecho del plano  $s$ . Véase la Figura n° 78 las zonas de estabilidad en el plano  $s$ .

Fig. 78. Regiones de estabilidad en el plano  $s$ .

Nuestro problema ahora es determinar la estabilidad de un sistema de control, para ello existen varios métodos para determinar la estabilidad de un sistema realimentado, estos involucran las raíces de la ecuación característica. Los métodos más utilizados para estudiar la estabilidad de sistemas de control son:

1. Criterio de Routh–Hurwitz.
2. Criterio de Nyquist.
3. Método de Diagrama de Bode.

Es evidente que para el análisis de los sistemas de control, se presentan métodos alternativos que resuelven el mismo problema, el diseñador simplemente selecciona el método a utilizar que considere que es la mejor herramienta, dependiendo de la situación particular que enfrenta. En lo particular, preferimos los dos primeros, sin desmeritar y quitar la importancia al diagrama de Bode.

## **Métodos para determinar la estabilidad**

### **Criterio de Routh-Hurwitz**

Es un método algebraico que ofrece información sobre la estabilidad absoluta de un sistema lineal invariante en el tiempo que tiene una ecuación característica con coeficientes constantes. El criterio prueba la estabilidad absoluta para cualquiera de las raíces de la ecuación característica situadas en el lado derecho del plano  $s$ , también indica para el número de raíces situadas en el eje  $j\omega$  y en el lado derecho del plano  $s$ .

### **Tabulación de Routh**

Para construir la tabulación de Ruth se basa en ordenamiento de los coeficientes de la ecuación característica  $f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$  tomando una lista o arreglo como sigue a continuación:

$$\begin{array}{ccccccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \end{array}$$

Una regla nemotécnica consiste en tomar el inicial y luego saltar un coeficiente y seleccionar el otro que sigue hasta que se agoten los coeficientes, luego se empieza por el siguiente que no fue seleccionado en el paso anterior y se repite el mismo proceso para completar las dos filas principales, los arreglos subsiguientes basados en cálculos sencillos con el uso de la siguiente fórmula:

$$-\frac{1}{a_{n-1}} \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}$$

veamos cómo es el proceso.

Sea la ecuación característica:

$$f(s) = a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Construimos las dos filas principales por selección alterna- da:

$$s^6 \quad a_6 \quad a_4 \quad a_2 \quad a_0$$

$$s^5 \quad a_5 \quad a_3 \quad a_1 \quad 0$$

Luego necesitamos realizar cálculos sencillos para encontrar los siguientes grados que se indican a continuación:

$$\begin{array}{cccccc} s^6 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\ s^5 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ s^4 & A & B & a_0 & 0 \end{array} \quad A = \frac{a_5 a_4 - a_6 a_3}{a_5}; \quad B = \frac{a_5 a_2 - a_6 a_1}{a_5};$$

$$C = \frac{a_5 a_0 - a_6 0}{a_5} = a_0$$

$$s^3 \quad D \quad E \quad 0 \quad 0 \quad D = \frac{Aa_3 - Ba_5}{A}; \quad E = \frac{Aa_1 - a_5 a_0}{A};$$

$$\frac{A.0 - a_5 0}{A} = 0$$

$$s^2 \quad F \quad a_0 \quad 0 \quad 0 \quad F = \frac{DB - AE}{D}; \quad a_0 = \frac{Da_0 - A.0}{D};$$

$$s \quad G \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad G = \frac{E - Da_0}{F};$$

$$s^0 \quad a_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad a_0 = \frac{Ga_0 - E.0}{G};$$

Las raíces de la ecuación característica estarán en el semiplano izquierdo, si todos los elementos de la primera columna tienen el mismo signo, así mismo el número de cambios de signos en los elementos de la primera columna equivale al número de raíces con parte real positiva o en el semiplano derecho.

El criterio establece que para que un sistema sea estable, requiere que no haya cambios de signos en la primera columna de la tabulación, éste es un requisito necesario y suficiente; sin embargo, existen casos especiales donde se debe adecuar o modificar el procedimiento de cálculo que veremos con detalle a continuación.

### EJEMPLO 1

Determine la estabilidad del sistema, cuya ecuación característica es dada:

$$f(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} s^4 & 2 & & 3 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} s^3 & 1 & & 5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} s^3 & \frac{(1)(3) - (2)(5)}{1} = -7 & & 10 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} s & \frac{((-7)(5) - (1)(10))}{-7} = 6.43 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

Hay cambios de signos en la primera columna de la tabulación de Routh, la ecuación tiene dos raíces en el lado derecho del plano  $s$ , por lo tanto el sistema es INESTABLE. Usando el criterio de Routh – Hurwitz.

### *Casos especiales*

#### *Caso n° 1. Cuando el primer elemento de una fila es cero*

Si un cero aparece en el primer elemento de la fila, la tabulación de Routh no debe continuar, para remediar la situación, debemos reemplazar el cero por un número positivo muy pequeño  $\varepsilon$  y se continua con el proceso de la tabulación de Routh

**EJEMPLO 2**

Sea el sistema  $f(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$

Veamos:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 0 & 3 & \end{array}$$

Luego se sustituye por  $\varepsilon$  y queda:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & \varepsilon & 3 & \\ s & \frac{2s - 3}{\varepsilon} & 0 & \\ s^0 & 3 & & \end{array}$$

Dos cambios de signos, el coeficiente de  $s$  es negativo.

**Caso n° 2. Cuando toda una fila es cero**

Cuando toda la fila son ceros, se debe usar una ecuación auxiliar  $A(s) = 0$ , está formada por la fila justo arriba a la de ceros, luego se deriva la ecuación auxiliar y los coeficientes resultantes de esa operación se sustituyen en la fila de ceros, luego se continua con el procedimiento de Routh.

**EJEMPLO 3**

Consideré la ecuación característica de un sistema de control.

$$f(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

La tabulación:

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 8 & 7 \\ s^4 & 4 & 8 & 4 \\ s^3 & 6 & 6 & \\ s^2 & 4 & 4 & \\ s & 0 & 0 & \end{array}$$

Se usa la ecuación auxiliar:

$$A(s) = s^2 + 4 = 0$$

Luego,

$$\frac{dA(s)}{dt} = 8s + 0$$

Se sustituyen estos coeficientes en la fila de ceros y queda:

$s^5$	1	8	7
$s^4$	4	8	4
$s^3$	6	6	
$s^2$	4	4	
$s$	8	0	
$s^0$	4		

No hay cambios de signo, por tanto por el criterio de Routh el sistema es ESTABLE

Ahora analicemos los parámetros de un sistema usando el criterio de Routh–Hurwitz. En este caso se involucran las constantes del sistema y se determina el intervalo de valores que deben de tomar para que el sistema sea estable.

#### EJEMPLO 4

$$\text{Sea } G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 2)}$$

La ecuación característica es:

$$f(s) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + K = 0$$

La tabulación de Routh.

$s^4$	1	6	$K$
$s^3$	4	4	0
$s^2$	5	$K$	
$s$	$\frac{20 - 4K}{5}$		
$s^0$		$K$	

Para que el sistema sea estable debe cumplirse que  $K > 0$  y  $20 - 4K > 0$  resolviendo el sistema de inecuaciones se obtiene  $K > 0$  y  $K > 5$ , esto implica que el sistema es estable para los valores de dentro del intervalo  $K < 0 < 5$ , para  $K = 5$  el sistema se vuelve oscilatorio, lo que quiere decir que es marginalmente estable.

#### EJEMPLO 5

Sea el sistema  $f(s) = s^3 + 3Bs^2 + 2s + K = 0$ .

La tabulación de Routh:

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 3B & K & 0 \\ s & \frac{6B - K}{3B} & 0 \\ s^0 & K \end{array}$$

Para que el sistema sea estable debe cumplirse  $3B > 0$   $K > 0$  y  $6B - K > 0$ , esto implica que tenemos las inecuaciones  $B > 0$ ,  $K > 0$  y  $K > 6B$ , la región de estabilidad es mostrada en la Figura n° 79, para que el sistema sea estable  $B$  y  $K$  sólo pueden tomar valores dentro de la zona de estabilidad sin incluir los bordes,  $B > 0$ ,  $K > 0$  y  $K > 6B$ .

#### Criterio de Nyquist

Determina la estabilidad de un sistema a lazo cerrado a partir de la respuesta de frecuencia en lazo abierto y los polos a lazo abierto, por esta razón podemos decir que es un método semigráfico que suministra información sobre la diferencia entre el número de polos y ceros de la función de transferencia de lazo cerrado o realimentado que se encuentran en el lado derecho del plano  $s$ .

Antes de explicar el criterio de Nyquist, es necesario desarrollar los diagramas polares que permiten graficar la respuesta de frecuencia de un sistema realimentado, estos diagramas son útiles para investigar la estabilidad del sistema y será de mucha ayuda en la construcción de la gráfica de Nyquist.

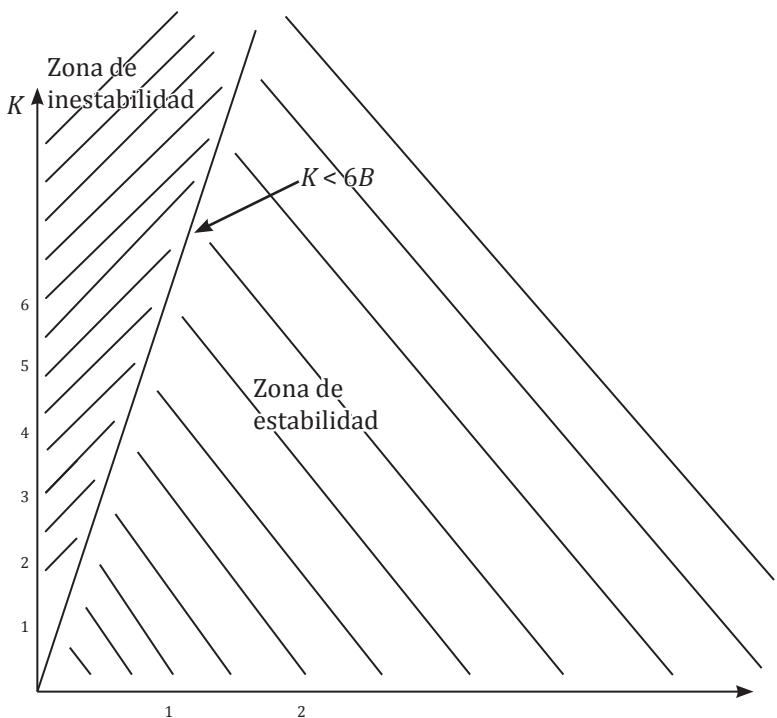


Fig. 79. Zona de estabilidad para el sistema del Ejemplo 5.

**Diagramas polares:** el diagrama polar de una función transferencia  $G_t(j\omega)$  es una gráfica de magnitud respecto a un ángulo de fase de  $G_t(j\omega)$ , cuando  $\omega$  varía de cero a infinito, por tanto se define como el lugar geométrico de los vectores  $|G_t(j\omega)| \angle G_t(j\omega)$  cuando  $\omega$  varía de cero a infinito, los ángulos polares serán positivos si se miden en sentido contrario a las agujas del reloj y negativos si van en el mismo sentido de las agujas del reloj a partir del eje real positivo.

Veamos ahora el análisis de gráficas polares de los tipos de control realimentado.

#### Caso n° 1. Sistema con dos polos reales

La función de transferencia a lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Analizamos primero la función haciendo el cambio de  $s = j\omega$ , nos queda:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}$$

Ahora observemos los valores que toma la función cuando  $\omega$  tiende a cero y cuando tiende a infinito.

$$G(j\omega)H(j\omega) = \begin{cases} K \angle 0 & \omega \rightarrow 0 \\ 0 \angle -180 & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

De igual forma se puede construir una tabla de valores para esta función en el intervalo  $(0, \infty)$  y graficar con el módulo y ángulo para cada valor dado a la función.

Veamos la Figura n° 80 donde se muestra el diagrama polar de este tipo de sistema.

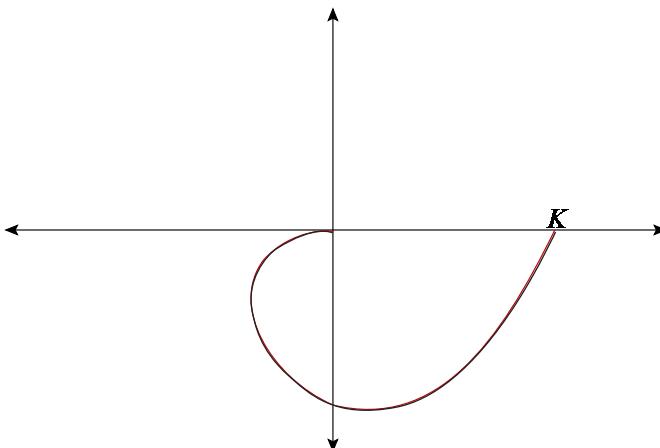


Fig. 80. Diagrama polar para un sistema de dos polos reales.

### Caso n° 2 Sistema con dos polos reales y un polo en el origen

La función de transferencia a lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)s}$$

Analizamos primero la función haciendo el cambio de  $s = j\omega$ , nos queda:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(T_1 j\omega + 1)j\omega}$$

Ahora observemos los valores que toma la función cuando  $\omega$  tiende a cero y cuando tiende a infinito.

$$G(j\omega)H(j\omega) = \begin{cases} \infty \angle -90 & \omega \rightarrow 0 \\ 0 \angle -180 & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

También se puede construir una tabla de valores para esta función variando  $\omega$  en el intervalo  $(0, \infty)$  y graficar con el modulo y ángulo para cada valor dado a la función, para obtener una gráfica mucho más exacta.

Véase la Figura n° 81, donde se muestra el diagrama polar de este tipo de sistema.

Otro ejemplo para este tipo de caso, pero cuatro polos y uno en el origen. Sea el sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

Analizamos primero la función haciendo el cambio de  $s = j\omega$ , nos queda:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)}$$

Veamos los valores que toma la función cuando  $\omega$  tiende a cero y cuando tiende a infinito.

$$G(j\omega)H(j\omega) = \begin{cases} \infty \angle -90 & \omega \rightarrow 0 \\ 0 \angle -360 & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

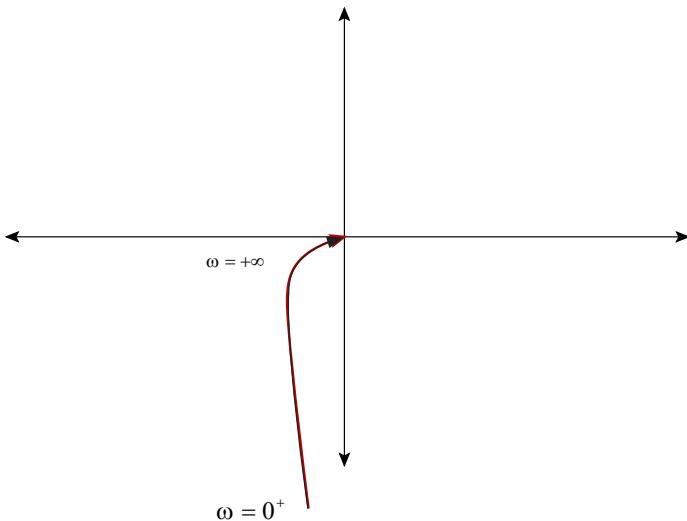


Fig. 81. Diagrama polar para el caso n° 2.

Veamos la Figura n° 82, donde se muestra el diagrama polar de este tipo de sistema:

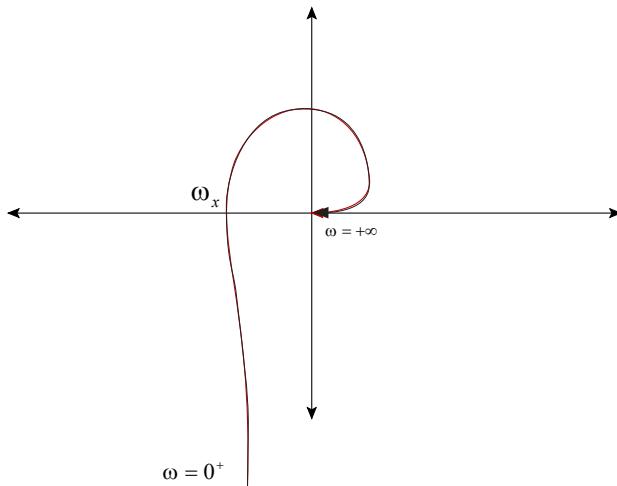


Fig. 82. Diagrama polar del sistema de la ecuación

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)(T_3j\omega + 1)} .$$

Obsérvese que el corte  $\omega_x$  se puede calcular cuando  $Im[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$  y el corte con el eje imaginario  $Re[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ .

### Caso n° 3. Polos reales y dos en el origen

Sea el sistema

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

Analizamos primero la función haciendo el cambio de  $s = j\omega$ , nos queda:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)(T_3j\omega + 1)}$$

Análogamente hacemos el proceso anterior y obtenemos:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \begin{cases} \infty \angle -180 & \omega \rightarrow 0 \\ 0 \angle -360 & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Veamos la Figura n° 83, el diagrama polar del sistema:

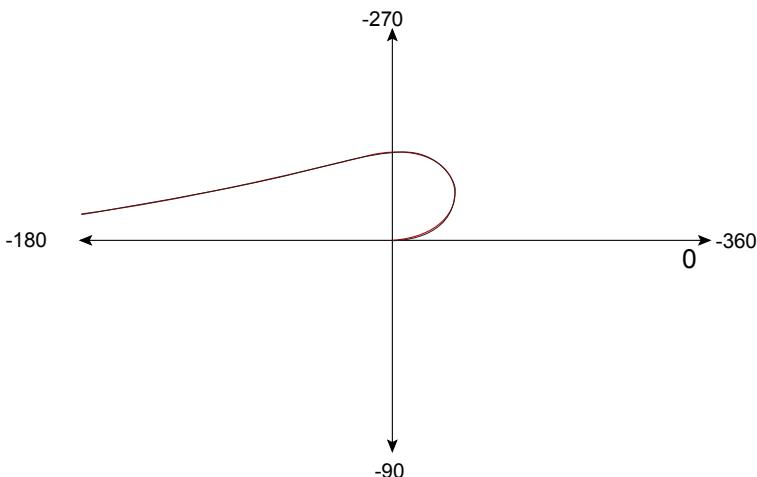


Fig. 83. Diagrama polar para el sistema del Caso n° 3.

Veamos el caso con un cero real, observemos el cambio en el diagrama polar:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_4 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)};$$

Analizamos primero la función haciendo el cambio de  $s = j\omega$ , nos queda:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(T_4 j\omega + 1)}{(j\omega)^2(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)}$$

Luego analizamos  $\omega$  cuando tiende a cero y a infinito.

$$G(j\omega)H(j\omega) = \begin{cases} \infty \angle -180 & \omega \rightarrow 0 \\ 0 \angle -360 & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Veamos la Figura n° 84, el diagrama polar del sistema:

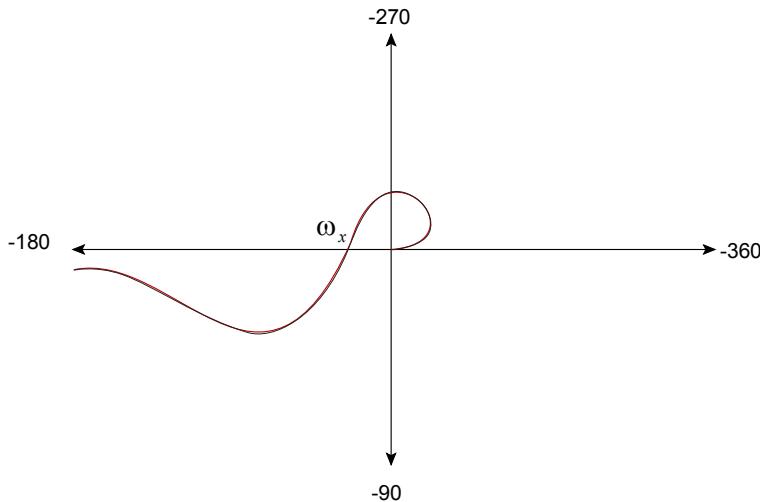


Fig. 84. Diagrama polar para un sistema del caso n° 3 con un cero real.

Ahora estamos listos para analizar la estabilidad usando el criterio Nyquist, para ello definiremos la trayectoria de Nyquist, para analizar los sistemas de control lineales, se supone que el

contorno cerrado en el plano  $s$  encierra el semiplano derecho de éste. El contorno esta formado por el eje  $j\omega$  completo desde  $\omega = -\infty$  a  $\omega = \infty$ , y una trayectoria circular de radio infinito en el semiplano derecho de  $s$ . Dicho contorno se conoce como la trayectoria de Nyquist (La trayectoria se forma en sentido de las agujas del reloj).

Cuando la función de transferencia de lazo abierto  $G(s)H(s)$  tiene  $n$  polos en el semiplano derecho de  $s$ , para ser estable el sistema, el lugar geométrico de  $G(s)H(s)$  debe rodear  $n$  veces el punto  $-1 + 0j$  en sentido contrario a las agujas del reloj, se traza la trayectoria de Nyquist modificada en el sentido de las agujas del reloj.

Para aplicar el criterio de Nyquist el diagrama polar debe dibujarse desde  $\omega = -\infty$  a  $\omega = \infty$ , para ello se debe completar el diagrama, dibujando la parte negativa de diagrama polar, se debe utilizar el conjugado del diagrama polar de la parte positiva, ésta es simétrica a la curva del diagrama polar para valores positivos de  $\omega$  y uniendo los dos diagramas forman un círculo de radio infinito.

Criterio de Nyquist expresa:

$$Z = N + P \quad (110)$$

donde,

$N$  = Números de rodeos en sentido de las agujas del reloj al punto  $-1 + 0J$ .

$N$  = Números de polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho de  $s$ .

$Z$  = Número de ceros de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho de  $s$ .

Si la trayectoria de Nyquist encierra  $Z$  ceros y  $P$  polos, no pasa por los polos ni los ceros de  $f(s)$  en sentido de las agujas del reloj, el contorno rodea un círculo de  $N = Z - P$  veces al punto  $-1 + 0J$  en sentido de las agujas del reloj (Los valores negativos implican el sentido contrario a las agujas del reloj).

Si  $P$  no es cero, para un sistema de control estable, se debe tener  $Z = 0$  o  $N = -P$ , lo cual indica que debe tener  $P$  rodeos en el punto  $-1 + 0J$  en el sentido de las agujas del reloj, si  $G(s)H(s)$  no tiene polos en el semiplano derecho de  $s$ , entonces  $Z = N$  por lo tanto, para que haya estabilidad, no debe haber rodeos a  $-1 + 0J$ .

### Análisis de estabilidad usando el criterio de Nyquist

Para el análisis de estabilidad se presentan tres casos usando el criterio de Nyquist establece las siguientes condiciones:

1. El punto  $-1 + 0J$  no está rodeado, lo que implica que el sistema es estable si no hay polos en el semiplano derecho de  $s$  en caso contrario el sistema es inestable.
2. El punto  $-1 + 0J$  es rodeado una o varias veces en sentido contrario a las agujas del reloj, el sistema es estable si el número de rodeos es igual a número de polos en el semiplano derecho de  $s$ ; en caso contrario el sistema es inestable.
3. El punto  $-1 + 0J$  queda rodeado en una o varias veces en sentido de las agujas del reloj diremos que el sistema es inestable.

A continuación damos algunos ejemplos donde se dibujarán la trayectoria de Nyquist y haremos el análisis de estabilidad usando el criterio de establecido por Nyquist.

#### EJEMPLO 6

Determine la estabilidad del sistema a lazo cerrado si la función a lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

tomamos  $T_1, T_2$  como constantes positivas.

Use el criterio de Nyquist para determinar la estabilidad del sistema.

**Primer paso:** construir el diagrama polar y la trayectoria de Nyquist.

Analizamos primero la función haciendo el cambio de  $s = j\omega$ ,

nos queda:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)}$$

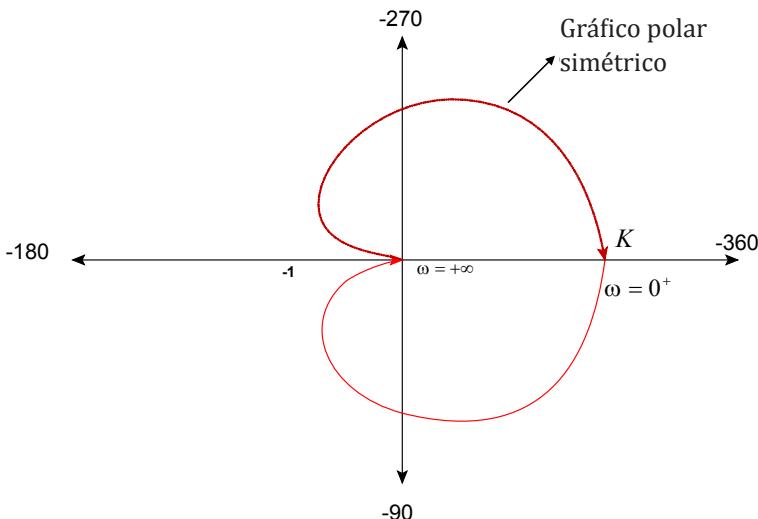


Fig. 85. Diagrama polar del ejemplo n° 6.

El diagrama polar simétrico es el conjugado del diagrama polar de la parte positiva, es una curva que forma el círculo de radio infinito en sentido de las agujas del reloj, este define la trayectoria de Nyquist.

**Segundo paso:** analizamos la estabilidad usando el criterio de Nyquist.

- La función  $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)}$ , no tiene polos en el semiplano derecho de  $s$ .
- El punto  $-1 + 0j$  no está rodeado por el lugar geométrico de  $G(j\omega)H(j\omega)$  para cualesquiera valores de  $K T_1, T_2$  positivos.

Aplicando el criterio Nyquist, condición n° 1, se concluye que el sistema es ESTABLE.

**EJEMPLO 7**

Determine la estabilidad del sistema a lazo cerrado si la función a lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Use el criterio de Nyquist para determinar la estabilidad del sistema.

**Primer paso:** construir el diagrama polar y la trayectoria de Nyquist.

Analizamos primero la función haciendo el cambio de  $s = j\omega$ , nos queda:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}$$

Para valores de  $K$  pequeño, la gráfica que a continuación mostramos, la obtenemos haciendo el análisis de  $\omega$  para valores que tienden a cero y a infinito:

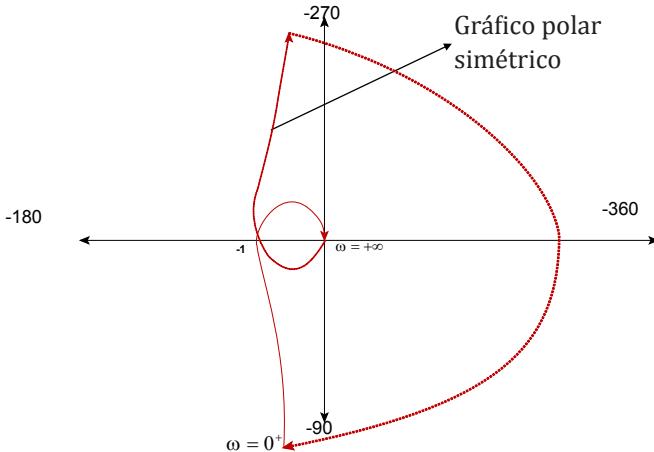


Fig. 86. Diagrama polar para  $K$  pequeño del ejemplo 7.

Para valores de  $K$  grandes, la gráfica que obtenemos es:

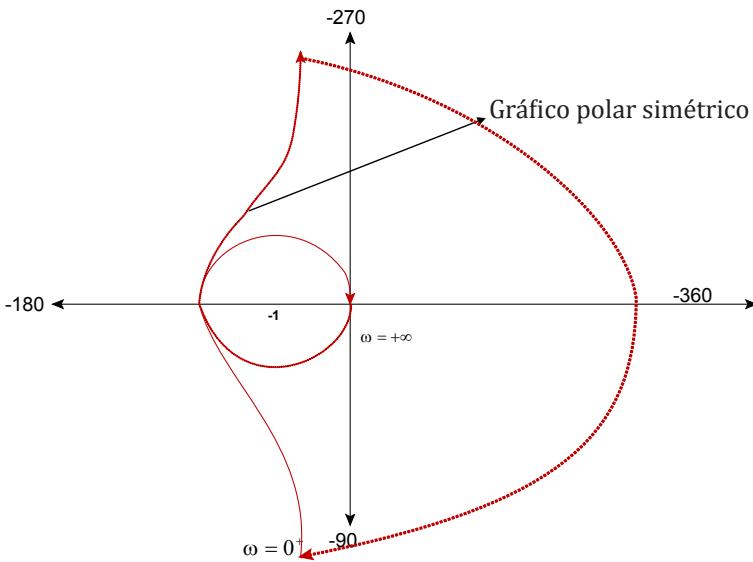


Fig. 76. Diagrama polar para  $K$  grande del ejemplo n°7.

**Segundo paso:** analizamos la estabilidad usando el criterio de Nyquist.

Primero analizamos para valores de  $K$  pequeños.

1. La función  $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)}$ , no tiene polos en el semiplano derecho de  $s$ .
2. El punto  $-1 + 0j$  no está rodeado por el lugar geométrico de  $G(j\omega)H(j\omega)$ .
3. Para cualesquiera valores de  $K, T_1, T_2$  positivos, implica  $N = 0, N = 0, P = 0$ .

Aplicando el criterio Nyquist condición n° 1, se concluye que el sistema es ESTABLE.

En segundo Término analizamos para valores de  $K$  grandes.

1. La función  $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)}$ , no tiene polos en el semiplano derecho de  $s$ .

2. El punto  $-1 + 0j$  está rodeado dos veces en sentido de las agujas del reloj por el lugar geométrico de  $G(j\omega)H(j\omega)$  si hay dos rodeos y no hay ceros esto implica que la fórmula  $N = Z - P, N = 2$ .
3. Para cualesquiera valores grandes de  $K$  positivos, implica  $N = 2, Z = 2, P = 0$  el criterio Nyquist la condición n° 3, se concluye que el sistema es INESTABLE.

#### EJEMPLO 8

Determine la estabilidad del sistema a lazo cerrado si la función a lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 j\omega + 1)}{s(T_1 j\omega + 1)}.$$

Use el criterio de Nyquist para determinar la estabilidad del sistema.

**Primer paso:** construir el diagrama polar y la trayectoria de Nyquist.

Analizamos primero la función haciendo el cambio de  $s = j\omega$ , nos queda:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 j\omega + 1)}{s(T_1 j\omega + 1)}$$

El gráfico lo obtenemos haciendo que  $\omega$  tienda a cero y a infinito o construyendo la gráfica para valores dentro del intervalo  $(-\infty, \infty)$ , cabe destacar que primero mostramos la Figura n° 88 para valores de  $K$  grandes en  $y$ , luego mostramos la Figura n° 89 para valores de  $K$  pequeños. El análisis lo haremos de manera individual para estudiar la estabilidad del sistema, porque presentan dos alternativas a considerar, análogamente como lo realizamos en el ejemplo n° 7, debemos de tener cuidado al dibujar este tipo de gráfica de Nyquist, porque cuando hay un polo en el lado derecho del plano complejo debemos de cerrar el círculo del lado izquierdo y en el mismo sentido de las agujas del reloj, si encerramos el polo que se encuentra en el plano positivo  $s$ , no estaríamos dibujando correctamente la trayectoria de Nyquist y no podremos analizar correctamente, veamos ahora:

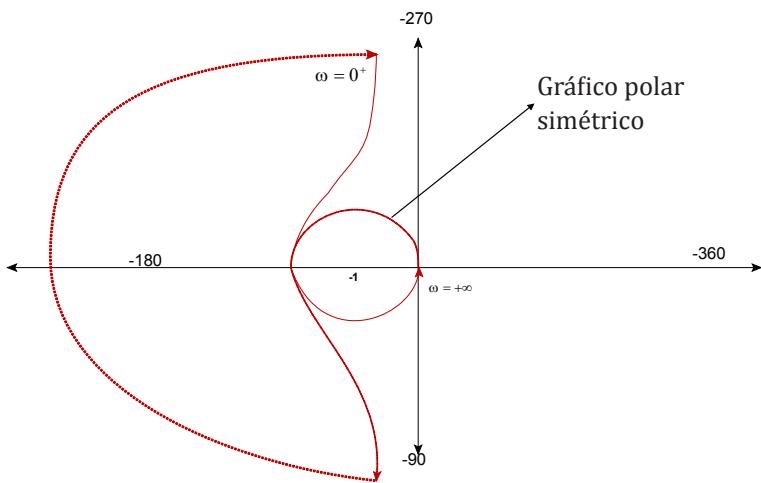


Fig. 88. Diagrama polar para valores de  $K$  grande del ejemplo n° 8.

Para valores de  $K$  pequeños:

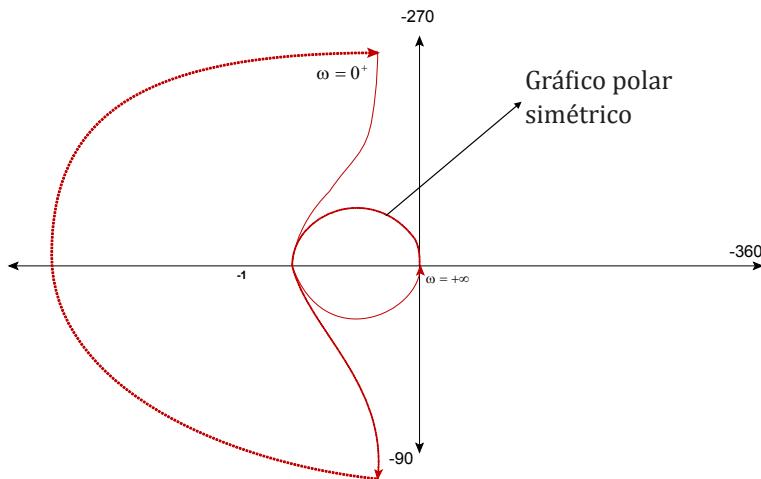


Fig. 89. Diagrama polar para valores de  $K$  pequeño del ejemplo n° 8.

**Segundo paso:** analizamos la estabilidad usando el criterio de Nyquist.

Primero analizamos para valores de  $K$  pequeños:

1. La función  $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(T_2 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega - 1)}$ , tiene un polo en el semiplano derecho de  $s$ .
2. El punto  $-1 + 0J$  está rodeado una vez en el sentido de las agujas del reloj por el lugar geométrico de  $G(j\omega)H(j\omega)$  para cualesquiera valores de  $T_1, T_2$  positivos.

Aplicando el criterio Nyquist condición n° 3, se concluye que el sistema es INESTABLE.

En segundo término analizamos para valores de  $K$  grandes.

1. La función  $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(T_2 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega - 1)}$  tiene un polo en el semiplano derecho de  $s$ .
2. El punto  $-1 + 0J$  está rodeado una vez en sentido contrario a las agujas del reloj por el lugar geométrico de  $G(s)H(s)$ , donde el número de rodeos es igual al número de polos en el semiplano derecho de  $s$  para cualesquiera valores de  $T_1, T_2$  positivos.

Aplicando el criterio Nyquist condición n° 2, se concluye que el sistema es ESTABLE.

### Determinación de estabilidad usando Matlab

Para el uso de la herramienta Matlab, sólo se debe usar la instrucción:

>nyquist(nun,den); hagamos un ejemplo en el uso de esta instrucción.

#### EJEMPLO 9

Sea la función de transferencia simple:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

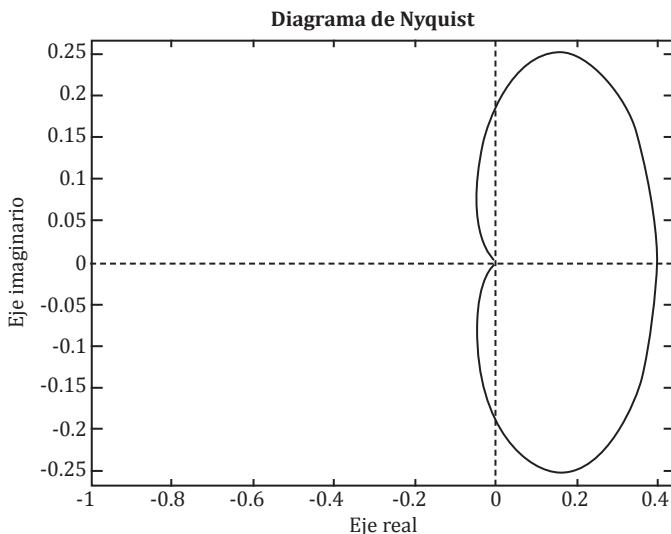
A continuación utilizaremos el software matemático Matlab donde utilizaremos los comandos relacionados con el criterio de Nyquist, para ello es necesario seguir los siguientes pasos:

Ejecutamos el programa Matlab y escribimos la instrucción de la siguiente manera.

To get started, select “MATLAB Help” from the Help menu.

```
>> nun=[0 0 0.4];
>> den=[0.02 0.3 1];
>> nyquist(nun,den)
```

Al ejecutar las instrucciones obtenemos la gráfica de Nyquist:



**Fig. 90. Gráfico polar usando Matlab.**

Este gráfico es análogo al modelo desarrollado en el Capítulo 6, primer caso.

## PROBLEMAS

1. Usando el criterio de Routh- Horwitz determine la estabilidad de los siguientes sistema:

$$1.1 \quad G(s)H(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + 5}$$

$$1.2 \quad G(s)H(s) = \frac{100(s - 1)}{(s - 5)(s^2 + 2s + 2)}$$

$$1.3 \quad G(s)H(s) = \frac{100}{s^3 - 5s^2 + 3s + 10}$$

$$1.4 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s - 1)}{s^4 + 3s^3 + 50s^2 + s + 10}$$

$$1.5 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s - 1)}{(s - 5)(s^2 + 2)}$$

2. Para cada una de las ecuaciones características de los sistemas de control dados a continuación dados, determine el intervalo de estabilidad de  $K$  para que el sistema sea estable.

$$2.1 \quad f(s) = s^3 + (K + 2)s^2 + 2Ks + 10K = 0$$

$$2.2 \quad f(s) = s^4 + Ks^3 + 5s^2 + 10s + 10 = 0$$

$$2.3 \quad f(s) = s^4 + Ks^3 + 2s^2 + (K + 1)s + 10 = 0$$

$$2.4 \quad f(s) = s^3 + 20s^2 + 5s + 10 = 0$$

3. La función de transferencia a lazo simple de un sistema de control realimentado esta dado por:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - 5)}{s(s + 2)(Bs + 1)},$$

donde los parámetros  $K$  y  $B$  pueden ser representado en plano  $K$  en el eje horizontal y  $B$  en el eje vertical, encuentre la zona de estabilidad del sistema.

4. Para el diagrama de bloque de un motor con tacómetro de realimentación mostrado en la Figura n° 60, determine el intervalo de  $K_t$  para que el sistema sea estable.

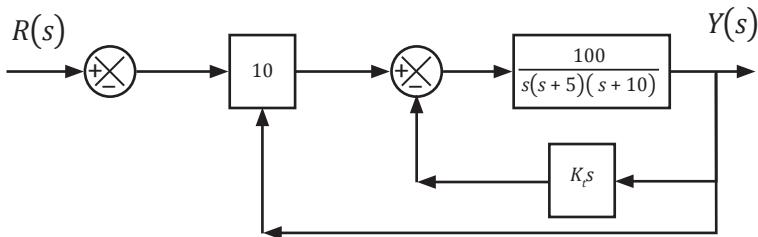


Fig. 91. Diagrama de bloque del problema n° 4.

5. Para los sistemas de control realimentados donde  $G(s)H(s)$  donde son dados a continuación, determine la estabilidad sistema usando el criterio de Nyquist.

$$5.1 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+2)(s+5)(s+15)}$$

$$5.2 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^3 + 3s + 1)}$$

$$5.3 \quad G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(s-2)(s+10)}$$

$$5.4 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+10)}{s(s-1)(s+1000)}$$

$$5.5 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^2 - 7s + 12)}$$

## REFERENCIAS

1. Barrientos, Antonio, Ricardo, Sanz. **Control de Sistemas Continuos, problemas resueltos.** McGraw-Hill. España, 1996.
2. D'azzo, John and Houpis, Constantine. **Linear Control System Analysis and Design.** McGraw-Hill, 4ta. ed. New York, 1995.
3. Dorf, Richard and Bishop, Robert. **Sistemas de Control Moderno.** Pearson. 10ma. ed. España, 2006.
4. Dorsey, John. **Sistemas de Control Continuos y Discretos.** McGraw-Hill 1era. ed. México, 2003.
5. Eronini-Umez-Eronini. **Dinámica de Sistemas de Control.** Thomson Learning, México, 2001.
6. Kamen, Edward. **Introduction to Signals and Systems.** Prentice Hall. 2da. ed. New York, 1990.
7. Kuo, Benjamin and Golnaraghi, Farid. **Automatic Control Systems.** Wyle and Sons. 8va. ed. New York, 2003.
8. Ogata, Katsuhito. **Ingeniería de Control Moderna.** Pearson. 4ta. ed. España, 2002.
9. Phillips, Charles and Harbor. **Royce, Feedback Control Systems.** Prentice Hall. 3era. ed. 1996.
10. Rodríguez, Maulio. **Análisis Moderno de Redes Eléctricas.** Universidad del Zulia (Ediluz), 1era. ed. 1986.
11. Thaler, George y Brown, Robert. **Feedback Control Systems.** McGraw-Hill, 2da. ed. 1960.
12. Valencia, Hernán. **Sistemas Automáticos de Control.** Serie Nabla Delta, Universidad Pontificia Bolivariana. 1997.
13. Fongiel, M. **Automatic Control Systems, Robotics.** Research and education association. 1er. ed. 2000.

## **CAPÍTULO 7**

### **TÉCNICA DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE RAÍCES**

#### ***Introducción***

La respuesta transitoria de un sistema realimentado se relaciona con la ubicación de las raíces de la ecuación característica del sistema, por lo tanto se puede describir el comportamiento de un sistema realimentado (a lazo cerrado) en términos de la ubicación de las raíces de la ecuación característica en el plano  $s$ , donde contiene los polos y ceros del sistema.

Si la respuesta del sistema realimentado puede ajustarse de tal forma que pueda conseguirse que éste tenga el comportamiento deseado mediante la variación de uno o más parámetros del sistema, resulta muy útil determinar la ubicación de las raíces de la ecuación característica del sistema cuando se modifica un parámetro, esto trae como consecuencia que cuando un parámetro del sistema es modificado, la ganancia del mismo también varía haciendo que las raíces de la ecuación característica se muevan a las posiciones deseadas.

W.R. Evans en 1948 desarrolló un método sencillo para determinar las raíces de la ecuación característica, ampliamente utilizado en los sistemas de control, este método se denomina *lugar geométrico de raíces*, con este método se grafican las raíces de la ecuación característica, para todos los valores de un parámetro del sistema. El lugar geométrico de raíces es una herramienta poderosa para el análisis y diseño de sistemas de control realimentado, el cual es el tema central de este capítulo. Esta técnica se desarrollará basado en el análisis y propiedades

para la construcción del lugar geométrico de raíces manualmente, así como también se mostrará los dibujos de los lugares geométricos de raíces generados con el uso de la herramienta computacional Matlab.

### **Método de lugar geométrico de raíces**

De acuerdo al modelo de sistema de control mostrado en la Figura n° 77, en el Capítulo 6 de este texto, sobre la definición de estabilidad, en el cual se dedujo la fórmula (109), la cual quedó de la forma:

$$f(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = \frac{KQ(s)}{P(s)} \Rightarrow f(s) = P(s) + KQ(s) = 0,$$

ésta representa la ecuación característica del sistema de control, si  $1 + G(s)H(s) = 0$ , lo que implica que

$$G(s)H(s) = -1, \quad (111)$$

como  $G(s)H(s)$  es una cantidad compleja, por lo tanto esta ecuación se divide en dos condiciones:

Condición de ángulo:

$$\angle G(s)H(s) = \pm\pi(2k + 1) \quad (112)$$

Condición de magnitud:

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (113)$$

En muchos casos  $G(s)H(s)$  puede contener un parámetro de ganancia  $K$ , entonces la ecuación característica toma la forma

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_m)} = 0 \quad (114)$$

donde las raíces del polinomio del numerador se definen como ceros, se denotarán en la gráfica en el plano  $s$  como "0" y las raíces del polinomio del denominador se denominan polos y se denotaran en el plano  $s$  como "X". Entonces los lugares geométricos

tricos de raíces para el sistema son los polos de lazo cerrado cuando la ganancia  $K$  varía de cero a infinito.

Para efectos de identificación, se definen las porciones de los lugares geométricos de raíces de acuerdo a los valores de  $K$ :

**RL:** porción del lugar geométrico de raíces donde  $K$  varía desde cero hasta el infinito  $0 \leq K < \infty$ .

**RLC:** porción del lugar geométrico de raíces donde  $K$  varía desde menos infinito a cero  $-\infty < K < 0$ .

**RC:** contornos de las raíces cuando se varía más de un parámetro.

**Lugar geométrico de las raíces total:** cuando los valores de  $K$  varían desde menos infinito a infinito,  $-\infty < K < \infty$ .

### **Propiedades y construcción del lugar geométrico de raíces**

Las siguientes propiedades son muy útiles para construir el lugar geométrico de raíces manualmente, las propiedades se desarrollan con base en los polos y ceros de la ecuación característica.

#### **a) Puntos donde $K = 0, K = \pm\infty$**

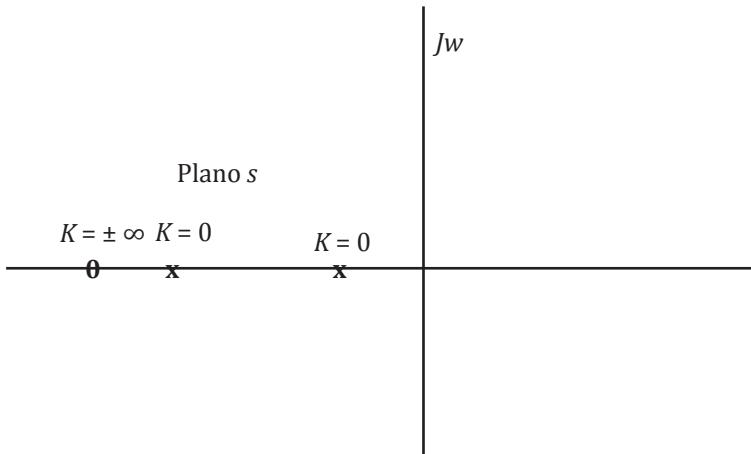
Tomando la condición de magnitud:

$$\frac{G(s)H(s)}{K} = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{1}{K} \Rightarrow |G(s)H(s)| = \frac{1}{|K|}, \quad (115)$$

Cuando  $K$  tiende a infinito  $G(s)H(s)$  tiende a cero, el valor de  $s$  tiende a los ceros y si  $K$  tiende a cero, entonces  $G(s)H(s)$  tiende a infinito, lo que implica que  $s$  tiende a los polos, como se muestra en la Figura n° 92.

#### **b) Número de ramas**

Son curvas continuas que comienzan en cada uno de los polos de  $G(s)H(s)$  para  $K > 0$ , el número de ramas lo determina el número de polos o raíces del polinomio del denominador de

Fig. 92. Puntos donde los cuales  $K=0$  y  $K=\pm\infty$ .

$G(s)H(s)$  de la forma:

$$\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = G(s)H(s) \quad (116)$$

### c) Ángulos de asíntotas

Para  $K \geq 0$  (RL), son asintóticas o asíntotas con ángulos según la ecuación:

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{n-m}, \quad (117)$$

Para  $K < 0$ , (RLC) son asintóticas o asíntotas con ángulos según la ecuación;

$$\theta_i = \frac{2i\pi}{n-m} \quad (118)$$

Con  $i = 1, 2, 3\dots |n-m|-1$

$n$  representa el grado del polinomio del denominador y  $m$  el grado del polinomio del numerador de la ecuación (116) de

$G(s)H(s)$ , siempre  $n > m$ , la razón estriba en que la mayoría de las funciones tienen más polos que ceros. Con  $n$  polos y  $m$  ceros, se tienen  $n-m$  ramificaciones del lugar geométrico de raíces aproximándose a los  $n-m$  ceros en el infinito.

#### d) Centro de asíntotas

Éste representa el lugar geométrico de raíces que cae en el eje real de  $s$  según la ecuación:

$$\sigma = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) - \sum \text{Ceros de } G(s)H(s)}{n - m}, \quad (119)$$

siempre es un número real, el centro de asíntotas representa el centro de gravedad del lugar geométrico de raíces.

#### e) Lugar geométrico de raíces en el eje real

Como se explicó en anteriormente RL representa la sección del lugar geométrico de raíces donde  $K \geq 0$ , está presente sobre el eje real si el número total de polos y ceros de  $G(s)H(s)$  a la derecha de la sección es impar.

De igual forma CRL, la sección del lugar geométrico de raíces donde  $K < 0$ , está presente sobre el eje real si el número total de polos y ceros de  $G(s)H(s)$  a la derecha de la sección es par. Cabe destacar que los polos y ceros complejos no contribuyen a tipo de lugar geométrico de raíces sobre el eje real. Como se muestra en la Figura n° 93.

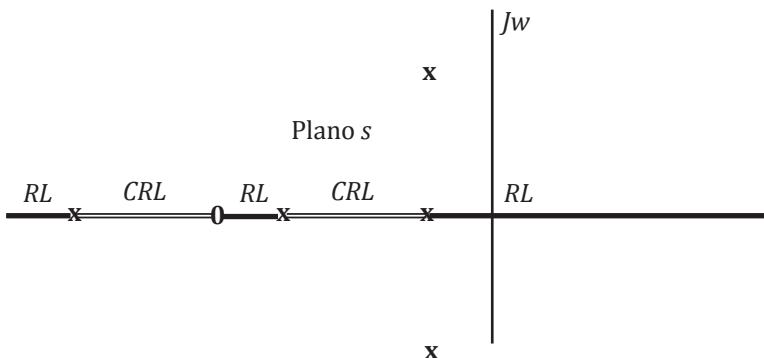


Fig. 93. Lugar geométrico de raíces sobre el eje real.

**f) Ángulo de salida y llegada del lugar geométrico de raíces en polos o cero complejos**

Los ángulos de salida y llegada del lugar geométrico de raíces de un cero o un polo de  $G(s)H(s)$  denotan el ángulo de la tangente del lugar geométrico de raíces cerca del punto, se calculan utilizando la condición de ángulo, de donde se deducen las siguientes ecuaciones:

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s + p_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) = (2i + 1)\pi \quad (120)$$

$$0 \leq k < \infty$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s + p_i) = 2i\pi \quad (121)$$

$$-\infty < k \leq 0 \quad \text{para } i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La interpretación de las ecuaciones 120 y 121, indican que cualquier punto  $s_1$  sobre RL que corresponde a valores positivos de  $K$ , debe satisfacer la condición; la diferencia entre las sumas de los ángulos vectores dibujados desde los ceros y los polos hasta  $s_1$ , debe ser un múltiplo impar de  $180^\circ$ . Análogamente para valores negativos de  $K$ , debe satisfacer la siguiente condición: de que la diferencia entre las sumas de los ángulos de los vectores dibujados desde los ceros y los polos hasta  $s_1$ , debe ser un múltiplo par de  $180^\circ$ .

Ahora bien para calcular el valor de  $K$  en un punto  $s_1$  sobre el lugar geométrico de raíces, bastará con aplicar la fórmula siguiente:

$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^n |(s + p_j)|}{\prod_{i=1}^m |(s + z_i)|} \quad (122)$$

Evaluándola en el punto  $s_1$  y se obtiene el valor numérico de  $K$ , la ecuación (111) es utilizada para calcular los valores de  $K$  para cualquier punto en plano  $s$  a lo largo del lugar geométrico

de raíces desde  $-\infty < K < \infty$  y así analizar el comportamiento del sistema gráficamente.

Es importante destacar que cuando se determina un ángulo de salida o llegada de RL de un polo o cero es determinado el ángulo de salida o llegada de CRL al mismo punto difiere en  $180^\circ$ , como se ilustra en la Figura n° 94.

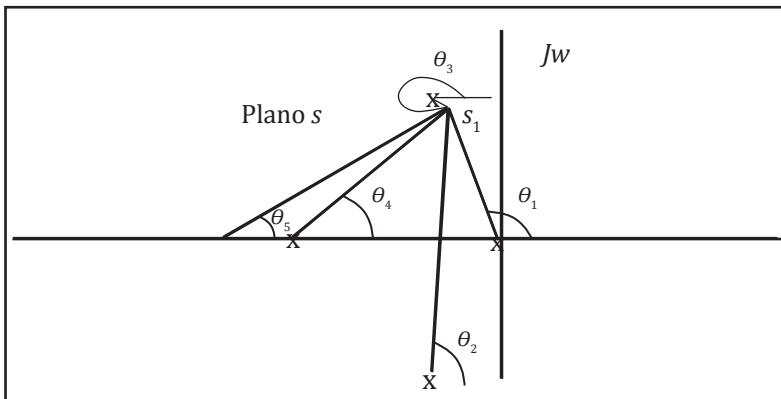


Fig. 94. Ángulo de apertura y salida en lugar geométrico de raíces.

Aplicando la fórmula (120) suponiendo que  $K > 0$ , entonces la ecuación queda expresada de la forma;

$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 = (2i + 1)\pi$ , donde los ángulos  $\theta_1, \theta_2, \theta_4, \theta_5$  se pueden determinar usando relaciones trigonométricas conocidas, seguidamente se despeja  $\theta_3$  de la ecuación, considerando  $\theta_2 = 90^\circ$ , quedando la expresión  $\theta_3 = (2i + 1)\pi \theta_1 - 90^\circ - \theta_4 + \theta_5$ , lo que determina el valor del ángulo buscado, análogamente si  $K < 0$ , aplica la fórmula (121) y se determina el valor del ángulo buscado.

### g) Intercepción del lugar geométrico de raíces con el eje imaginario

Para el corte con el eje imaginario, se debe aplicar el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz para determinar el intervalo donde  $K$  hace estable al sistema, seguidamente tomando los valores marginales o críticos de  $K$ , se sustituye en el polinomio  $S^2$

de la tabulación de Routh y se iguala a cero, las raíces complejas de ese polinomio definen el corte con el eje imaginario, si este polinomio no tiene raíces complejas no hay corte con este eje.

### **h) Puntos de ruptura o puntos de silla**

Los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de raíces de  $1 + G(s)H(s) = 0$ , deben cumplir con la condición:

$$\frac{dG(s)H(s)}{ds} = 0 \quad (123)$$

Sin embargo, se debe acotar que no todas las soluciones de la ecuación (123) son puntos de ruptura, para que sea punto de ruptura debe satisfacer la ecuación  $1 + G(s)H(s) = 0$ , esto implica que debe ser un punto del lugar geométrico de raíces para un valor real de  $K$ , lo que se infiere las siguientes observaciones:

- Todas las soluciones reales, son puntos de rupturas, porque el eje real, está contenido en el lugar geométrico de raíces
- Las soluciones complejas, serán puntos de ruptura si satisfacen la ecuación característica o están contenidas en el lugar geométrico de raíces.
- Si  $|G(s)H(s)| = \frac{1}{|K|} \Rightarrow K = -\frac{1}{G(s)H(s)}$ , de donde se dedu-

$$\text{ce que } \frac{dK}{ds} = \frac{dG(s)H(s)}{[G(s)H(s)]^2} = 0, \Rightarrow \frac{dK}{ds} = \frac{dG(s)H(s)}{ds} = 0$$

Obsérvese que el ángulo con el que sale o entra un lugar geométrico de raíces en un punto de ruptura, dependerá del número de lugares geométricos en que está involucrado dicho punto, se observa en las Figuras n° 95 y n° 96 que salen o entran con  $90^\circ$ , mientras que en la Figura n° 97, sale con  $45^\circ$ , por lo tanto para  $n$  lugares geométricos de raíces, ya sean RL o RLC, que entran o salen de un punto de ruptura, su ángulo está definido como  $180/n$ .

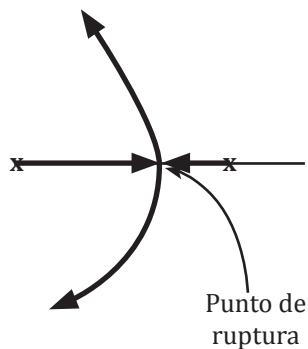


Fig. 95. Punto de ruptura sobre el eje real entre dos polos.

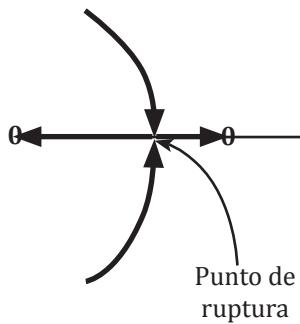


Fig. 96. Punto de ruptura sobre eje real entre dos ceros.

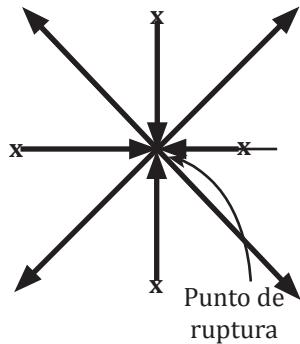


Fig. 97. Punto de ruptura sobre el eje real con polos conjugados.

**EJEMPLO 1**

Dibuje el lugar geométrico de raíces para el sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s-1)(s+2)}$$

Determine el valor de  $K$  para  $\zeta = 0.5$ .

Solución:

**Primer paso:** determinación de la ecuación característica.

Usando la ecuación (103), tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K}{s(s-1)(s+2)} \\ &= 0, \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \end{aligned}$$

**Segundo paso:** determinar los polos y ceros.

Las raíces del polinomio del denominador que representan los polos son,  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1$ ,  $s_3 = -2$ .

Las raíces del polinomio del denominador, como no hay raíces, se supone que hay un cero en el infinito,  $s = \infty$ .

**Tercer paso:** número de ramas.

Como hay tres raíces en el denominador hay tres ramas, porque el polinomio es de grado tres.

**Cuarto paso:** centro de asíntotas.

Aplicamos la fórmula (119),  $\sigma = \frac{0 + 1 - 2}{3 - 0} = \frac{-1}{3}$ , esto representa el centro de asíntotas.

**Quinto paso:** ángulos de las asíntotas.

Aplicamos las fórmulas (117) y (118), para  $K \geq 0$ , tenemos:

$$\theta_0 = 60^\circ$$

$$\theta_1 = 180^\circ$$

$$\theta_2 = 300^\circ$$

Para  $K < 0$  tenemos:

$$\theta_0 = 0^\circ$$

$$\theta_1 = 120^\circ$$

$$\theta_2 = 240^\circ$$

**Sexto paso:** ángulo de salida y apertura de polos o ceros.

Para nuestro problema este paso se obvia porque no hay polos o ceros complejos.

**Séptimo paso:** corte con el eje imaginario.

Se aplica el criterio de Routh-Hurwitz y la tabulación de Routh a la ecuación característica determinada en el primer paso.

$$f(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0,$$

luego aplicamos la tabulación de Routh,

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$K$
$s$	$\frac{6-K}{3}$	2

condiciones  $\begin{cases} K > 0 \\ 6 - K > 0 \end{cases}$ ; de donde la solución es  $0 < K < 6$ .

Tomamos el valor marginal  $K = 6$ , y sustituimos en el polinomio  $3s^2 + K = 0$ , de la tabulación de Routh, nos queda  $3s^2 + 6 = 0$ , las raíces del polinomio son  $s_1 = \sqrt{2} j$  y  $s_2 = -\sqrt{2} j$ , éstas representan el corte con el eje imaginario.

**Octavo paso:** puntos de ruptura o silla.

Para calcular los puntos de ruptura aplicamos la ecuación (123), por lo tanto queda expresado que:

$$\frac{dK}{ds} = 3s^2 + 6s + 2 = 0,$$

cuyas las raíces son  $s_1 = -1.57$  y  $s_2 = -0.42$ ; esto indica que hay

puntos de ruptura sobre el eje real que satisfacen la ecuación (123).

**Noveno paso:** graficar todo el lugar geométrico de raíces.

Usando todos los resultados obtenidos en los pasos anteriores se dibuja el lugar geométrico de raíces:

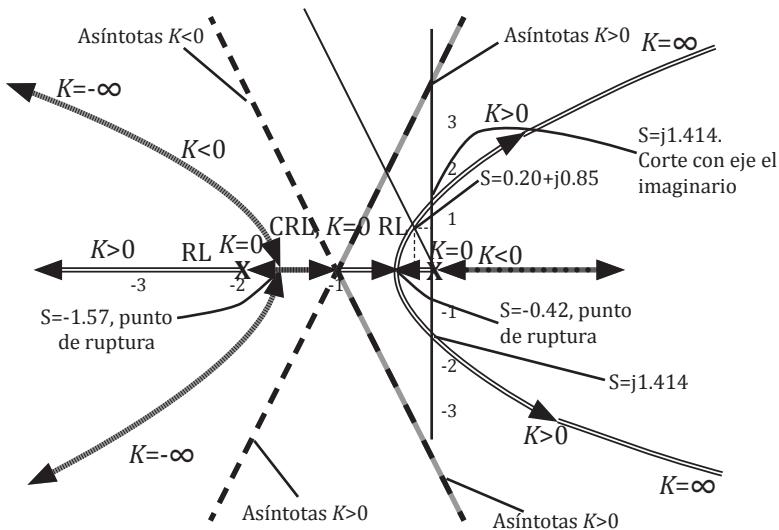


Fig. 98. Lugar geométrico de raíces del sistema  $\frac{K}{s(s-1)(s+2)}$

**Décimo paso:** calcular el valor de  $K$  para  $\zeta = 0.5$ .

Se levanta una recta que parte del origen con un ángulo cuyo valor es  $\arccos(0.5) = 60^\circ$ , tomando esa inclinación, cuando intercepte el lugar geométrico de raíces, se determina el valor de  $s$ , tomada de la gráfica es  $s = -0.20 + j 0.85$ .

Seguidamente usando la ecuación (122),

$$K = |s(s+1)(s+2)|_{s=-0.2+j0.85} = 1.8377$$

#### EJEMPLO 2

Dibuje el lugar geométrico de raíces del sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 2)};$$

SOLUCIÓN:

**Primer paso:** determinación de la ecuación característica.

Usando la ecuación (103), tenemos:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 2)} = 0, \\ &\Rightarrow s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 8s + K = 0 \end{aligned}$$

**Segundo paso:** determinar los polos y ceros:

Las raíces del polinomio del denominador que representan los polos son,  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1 + j$ ,  $s_3 = -1 - j$ ,  $s_4 = -2$ .

Las raíces del polinomio del denominador, como no hay raíces, se supone que hay un cero en el infinito,  $s = \infty$ .

**Tercer paso:** número de ramas.

Como hay tres raíces en el denominador hay cuatro ramas, porque el polinomio es de grado cuatro.

**Cuarto paso:** centro de las asíntotas

$$\text{Aplicamos la fórmula (119), } \sigma = \frac{0 - 1 - j - 1 + j - 2}{4 - 0} = -1.5,$$

esto representa el centro de asíntotas.

**Quinto paso:** ángulos de las asíntotas.

Aplicamos las fórmulas (117) y (118), para  $K \geq 0$ , tenemos

$$\theta_i = \frac{(2i + 1)\pi}{n - m}$$

$$\theta_0 = 45^\circ$$

$$\theta_1 = 135^\circ$$

$$\theta_2 = 225^\circ$$

$$\theta_4 = 315^\circ$$

Para  $K < 0$  tenemos  $\theta_i = \frac{2i\pi}{n-m}$ ;

$$\theta_0 = 0^\circ$$

$$\theta_1 = 90^\circ$$

$$\theta_2 = 180^\circ$$

$$\theta_4 = 270^\circ$$

**Sexto paso:** ángulo de salida y apertura de polos o ceros.

Dibujamos los polos sobre el eje imaginario y seleccionamos un polo complejo, hacemos concurrir una recta desde los demás polos hasta un punto muy cercano al polo complejo seleccionado, como se muestra en el dibujo a continuación.

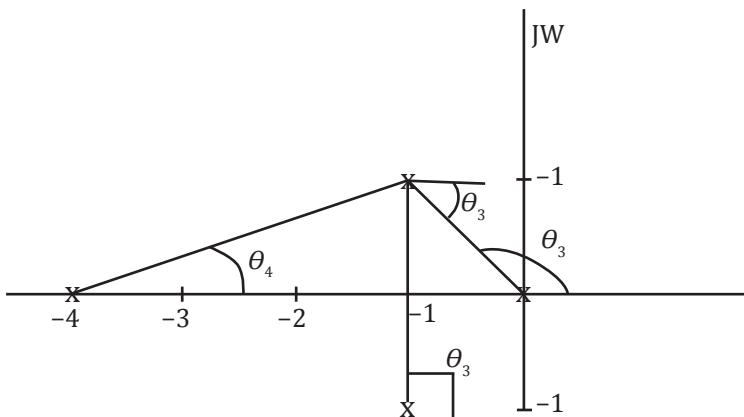


Fig. 99. Ángulo de apertura y salida de polo complejo  $\frac{K}{s(s^2 + 2s)(s + 2)}$

Si tomamos un punto lo más cercano posible al polo, podemos aproximar como si éste estuviese en el polo para calcular los ángulos mostrados en la Figura n° 99, porque los ángulos no variarán significativamente, y serán aproximadamente los mis-

mos que si el punto estuviese en el polo, pero para efectos del cálculo de  $K$ , se debe usar el punto aproximado al polo, porque si no el resultado será  $K = 0$ .

$$\theta_4 = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{3} \right) = 18.43^\circ,$$

$$\theta_1 = 180^\circ - \operatorname{arctg}(1) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\theta_2 = 90^\circ$$

Podemos decir que para  $i = 1$ ,  $K > 0$  y calculamos el ángulo del polo complejo de la forma:

$$90^\circ + 18.43^\circ + 135^\circ + \theta_1 = 540^\circ$$

$$\theta_1 = 540^\circ - 243.57$$

$$= 293.97^\circ, \text{ o}$$

$$\theta_1 = -63.43^\circ$$

**Séptimo paso:** corte con el eje imaginario.

Se aplica criterio de Routh-Hurwitz y la tabulación de Routh a la ecuación característica determinada en el primer paso.

$$f(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 8s + K = 0,$$

y luego aplicamos la tabulación de Routh. Se obtiene:

$s^4$	1	10	$K$
$s^3$	6	8	
$s^2$	8.6	$K$	
$s$	$\frac{69.2 - 6K}{8.6}$		
$s^2$		$K$	

Las condiciones para estabilidad:

$$K > 0$$

$$69.2 - 6K > 0 \therefore \text{La solución es } 0 < K < 11.64$$

Tomamos el valor marginal  $K = 11.64$ , y sustituimos en el polinomio  $8.66s^2 + K = 0$ , de la tabulación de Routh, nos queda  $8.66s^2 + 11.64 = 0$  y las raíces del polinomio son  $s_1 = 1.15j$  y  $s_2 = -1.15j$ , las cuales representan el corte con el eje imaginario.

**Octavo paso:** puntos de ruptura o silla.

Para calcular los puntos de ruptura aplicamos la ecuación (123), por lo tanto queda expresado que:

$$\frac{dK}{ds} = 4s^3 + 18s^2 + 20s + 8 = 0, \text{ sólo la raíz } s_1 = -3,0922$$

satisface la ecuación (123), las demás raíces no se consideran.

**Noveno paso:** gráfica del lugar geométrico de raíces.

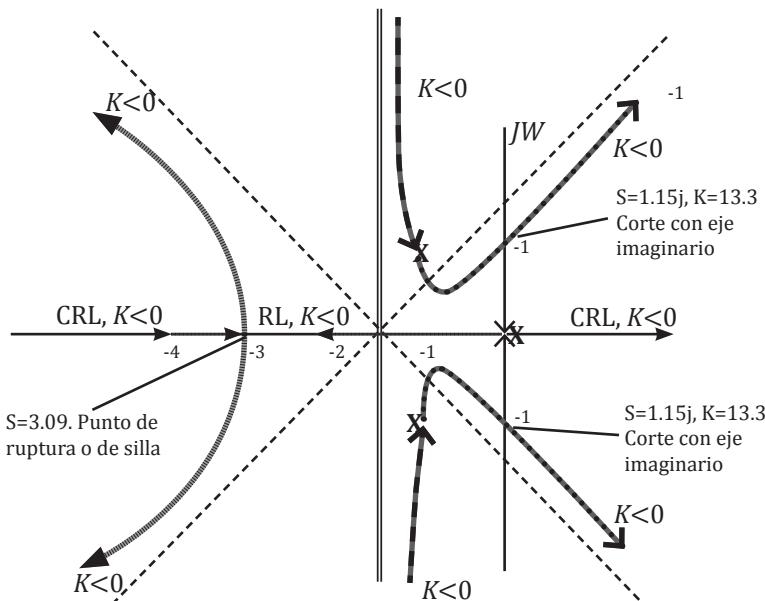


Fig. 100. Gráfica del lugar geométrico de raíces de  $\frac{K}{s(s^2 + 2s)(s + 2)}$

### EJEMPLO 3

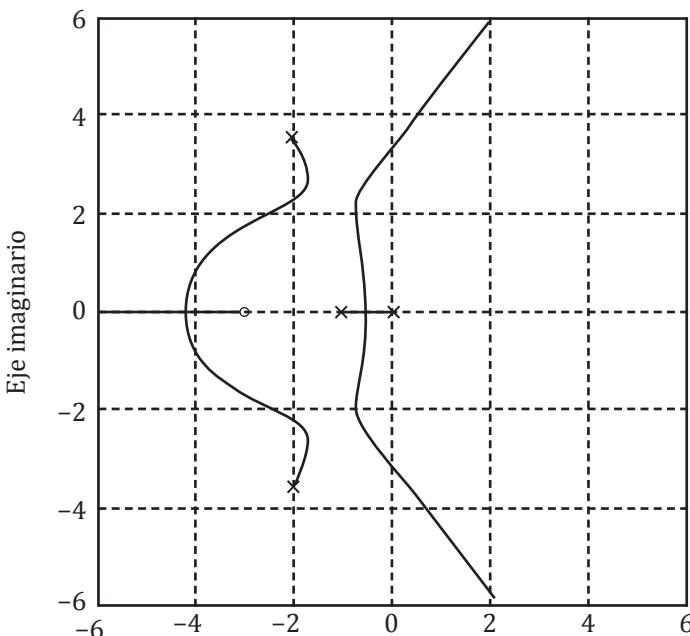
Dibuje el lugar geométrico de raíces utilizando Matlab para el sistema dado por la ecuación:

$$G(s)H(s) = \frac{(s + 3)}{s^4 + 5s^3 + 20s^2 + 16s}$$

Solución:

```
>num=[0 0 0 1 3];
>den=[1 5 20 16 0];
>rlocus (num,den)
```

El programa generará la siguiente gráfica:



**Fig. 101.** Lugar geométrico de raíces utilizando Matlab.

## PROBLEMAS

1. Dibuje el lugar geométrico de raíces para los sistemas mostrados a continuación

$$1.1 \quad G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+5)}$$

$$1.2 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+4)}{s^2(s+2)^3}$$

$$1.3 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^2+2s+2)}$$

$$1.4 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+4)^2}{s^2(s+8)^2}$$

$$1.5 \quad G(s)H(s) = \frac{K(2s+5)}{s^2(s^2+2s+1)}$$

$$1.6 \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{s(s^2+3s+2)}$$

$$1.7 \quad G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$$

$$1.8 \quad G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2+2s+2)(s+5)}$$

2. Demuestre que el lugar geométrico de Raíces para un sistema de control con  $G(s) = \frac{K(s^2 + 6s + 10)}{s^2 + 2s + 10} H(s) = 1$  es un círculo con el centro en el origen y con radio igual a  $\sqrt{10}$ .

3. Dibuje los lugares geométricos de raíces para el sistema de control a lazo cerrado con  $G(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1} H(s) = 1$ .

4. Dibuje el lugar geométrico de raíces para un sistema de control a lazo cerrado con  $G(s) = \frac{K(s + 4)}{s(s^2 + 2s + 2)} H(s) = 1$ .

5. Para las ecuaciones características mostradas a continuación, dibuje el lugar geométrico de raíces.

$$5.1 \quad f(s) = s^3 + 3s^2 + (K + 2)s + 5K = 0$$

$$5.2 \quad f(s) = s^3 + s^2 + (K + 2)s + 3K = 0$$

$$5.3 \quad f(s) = s^4 + 8s^3 + 16s^2 + K(s^2 + 4s + 5) = 0$$

$$5.4 \quad f(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 2Ks + 5K = 0$$

## REFERENCIAS

1. Barrientos, Antonio, Ricardo, Sanz. **Control de Sistemas Continuos, problemas resueltos.** McGraw-Hill, España, 1996.
2. D'azzo, John and Houpis, Constantine. **Linear Control System Analysis and Design.** McGraw-Hill, 4ta. ed. New York, 1995.
3. Dorf, Richard and Bishop, Robert. **Sistemas de Control Moderno.** Pearson. 10ma. ed. España, 2006.
4. Dorsey, John, **Sistemas de Control Continuos y Discretos.** McGraw-Hill 1era. ed. México, 2003.
5. Eronini-Umez-Eronini. **Dinámica de Sistemas de Control.** Thomson Learning, México, 2001.
6. Kamen, Edward. **Introduction to Signals and Systems.** Prentice Hall. 2da. ed. New York, 1990.
7. Kuo, Benjamin and Golnaraghi, Farid. **Automatic Control Systems.** Wyle and Sons. 8va. ed. New York, 2003.
8. Nise, Norman. **Control Systems Engineering.** Wiley & Sons, 4ta. ed. California, 2007.
9. Ogata, Katsuhito. **Ingeniería de Control Moderna.** Pearson. 4ta. ed. España, 2002.
10. Phillips, Charles and Harbor. **Royce. Feedback Control Systems.** Prentice Hall. 3era. ed. 1996.
11. Thaler, George y Brown, Robert, **Feedback Control Systems,** McGraw-Hill, 2da. ed. 1960.
12. Valencia, Hernán. **Sistemas Automáticos de Control.** Serie Nabla Delta. Universidad Pontificia Bolivariana, 1997.
13. Fongiel M. **Automatic Control Systems, Robotics.** Research and education association 1era. ed. 2000.



Se terminó de imprimir en el mes de febrero de 2011,  
300 ejemplares, en los talleres de la Imprenta UNERMB. Se  
utilizó fuente cambria, papel bond 20, portada glazze 200

*Alí José Carrillo Paz*

## *Sistemas Automáticos de Control Fundamentos Básicos de Análisis y Modelado*

**Alí José Carrillo Paz.** Graduado en Ingeniería Eléctrica en la Universidad del Zulia (LUZ), Lcdo. en Matemática y Física en la Universidad Rafael María Baralt (UNERMB), Maestría en Telemática y Doctorado en Ciencias de la Educación en la Universidad Dr. Rafael Belloso Chacín (URBE).

Tiene una amplia experiencia en el área de sistemas de control en la empresa privada ejerciendo los siguientes cargos: Ingeniero de Switch, Coordinador de Comutación, Coordinador de Planificación de Red, Gerente de Planificación de la Red, Gerente de Operaciones Región Noroccidental en Infonet. Además, en CANTV, ocupó los cargos de Ingeniero de Entrenamiento, Supervisor de Centrales y Supervisor de Área II.

Asimismo, ha ejercido la docencia en el Instituto Universitario Pedro Emilio Coll, en las asignaturas Sistemas de Control, Diseño de Equipos Eléctricos. En URBE administró la asignaturas Sistemas de Control I y II, Sistemas de Comunicación I y II, Telefonía, Programación I (FORTRAN), Análisis Numérico, Análisis de Señales, Laboratorio de Sistemas de Control I y II, Electrónica I, II y III, Diseño Lógico y Teoría de Ondas. En el Programa de Ingeniería y Tecnología de la UNERMB desde el año 2004 ha estado a cargo de Matemática I, IV y V, Matrices y Vectores, Física I, II y III, Instrumentación y Control, y Controles Automáticos.

**José Morón** (Revisor Técnico). Bachelor of Science (Ing. Eléctrica), Master of Science in Engineering, Ph.D. Candidate en la University of Michigan. Profesor en la Escuela de Ingeniería Eléctrica del Instituto Tecnológico de la Universidad de Oriente en las materias relacionadas con Circuitos Eléctricos, Sistemas de Control y Teoría Electromagnética. Allí ejerció la jefatura del Departamento de Electrónica y Comunicaciones. Asistente de Cátedra en la materia Electrónica Industrial, University of Michigan. Asistente de Investigaciones en el Radiation Laboratory de la Universidad de Michigan en la investigación de dispersión de ondas electromagnéticas por formas metálicas; y las en investigaciones sobre la propagación de ondas electromagnéticas de muy baja frecuencia en medios ionizados. Profesor Titular (Jubilado) de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad del Zulia. Dictó las materias relacionadas con Teoría Electromagnética, Sistemas de Control (lineales y no lineales), Circuitos Eléctricos y Comunicaciones. Director de la Escuela de Ingeniería Eléctrica (LUZ). Profesor y Director Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Rafael Urdaneta.

