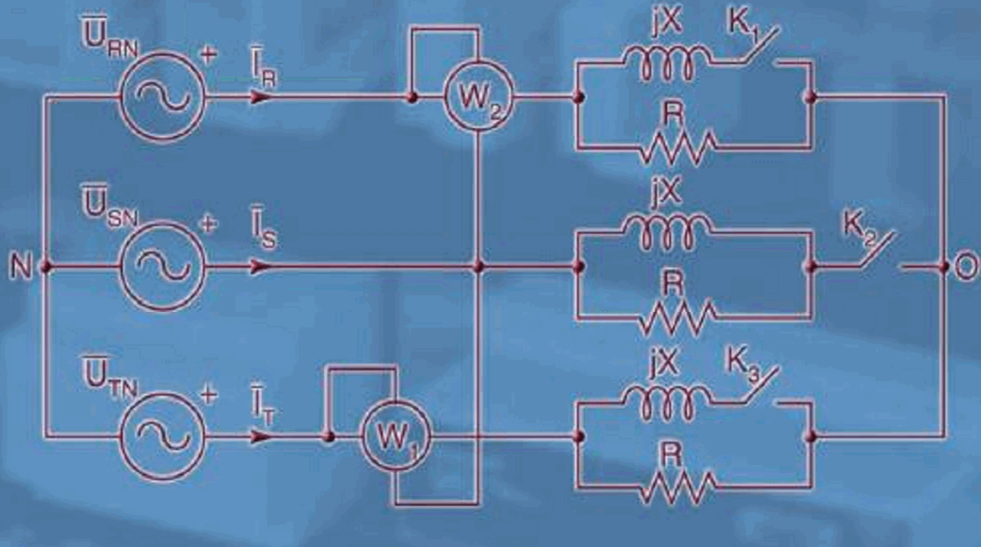
CIRCUITOS TRIFÁSICOS

PROBLEMAS RESUELTOS



ALFONSO BACHILLER SOLER

RAMÓN CANO GONZÁLEZ

NARCISO MORENO ALFONSO

DIAZ DE SANTOS

CIRCUITOS TRIFÁSICOS

PROBLEMAS RESUELTOS

ALFONSO BACHILLER SOLER

RAMÓN CANO GONZÁLEZ

NARCISO MORENO ALFONSO

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Sevilla

CIRCUITOS TRIFÁSICOS

PROBLEMAS RESUELTOS

Ediciones Díaz de Santos
E-mail: ediciones@diazdesantos.es
Internet: www.diazdesantos.es/ediciones

ISBN: 978-84-7978-910-7
Depósito legal: M. 17.544-2009

Diseño de cubierta: FER DIGITAL
Fotocomposición e impresión: Alfonso Bachiller / FER DIGITAL

Impreso en España

A Lidia, María, Pili, Claudia y Arturo.

ÍNDICE

PRÓLOGO

Este libro, lector, que tienes en tus manos es una recopilación de problemas de sistemas trifásicos. Voy a intentar explicar aquí cuáles han sido las ideas que han guiado a sus autores para realizar este proyecto.

La colección está dirigida, en primer lugar, a estudiantes de ingeniería en las ramas eléctrica y electrónica. Sin embargo cualquier otra disciplina en el ámbito de la ingeniería que aborde los sistemas trifásicos, puede encontrar muy útil esta recopilación de ejercicios. En este texto, la resolución de cada problema sigue una línea teórica contrastada en las aulas y definida en cualquiera de los muchos libros que abordan el estudio teórico de los circuitos trifásicos. La pretensión ha sido realizar un desarrollo eficaz, puesto al día, y al mismo tiempo que no resulte tedioso su estudio.

Los ejercicios presentados por los autores son fruto de su larga experiencia docente en esta área. Presuponen una buena colección de problemas originales que han sido motivados por la falta de los mismos en la amplia bibliografía existente relacionada con este tema. Por otro lado, la futura implantación de los nuevos planes de estudio reduce considerablemente las horas de clase presenciales, por lo que el alumno necesita para asimilar los conceptos teóricos recibidos en las aulas, adquirir cierta destreza en la resolución de problemas, dedicándole parte de sus horas de estudio a la resolución de los mismos. Con este libro se pretende facilitar el trabajo, al disponer de una recopilación de ejercicios suficiente para su comprensión.

Por último, justificar de nuevo el porqué de escribir un libro de problemas, en lugar de, como en la mayoría de los casos, escribir un libro dónde se desarrollan unas teorías y se propongan unos ejercicios resueltos en parte. Hay una razón de índole práctica y es que en la bibliografía existente no encontramos un libro de problemas de circuitos trifásicos exclusivo. Hay una razón más fuerte y es que los autores llevan muchos años enseñando de tal forma que el énfasis es puesto en la resolución de los problemas, como expresión de la comprensión de los conceptos tratados y expresiones manejadas en estos circuitos, por parte del alumno. La experiencia docente nos demuestra que el éxito en la resolución de este tipo de ejercicios en la vida profesional se debe a la destreza adquirida al manejar con soltura los conceptos que se adquieren con la práctica habitual de la realización de problemas.

No me queda más que felicitar a los autores por la labor realizada y el tiempo invertido en la compilación de esta obra y espero que esta colección te sea útil tanto en el ámbito universitario como profesional.

Mª Dolores Borrás Talavera
Profesora de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Sevilla

INTRODUCCIÓN

Esta obra recopila un conjunto de problemas originales e inéditos de circuitos trifásicos. Debido a la gran importancia que tiene para los técnicos el conocimiento de los circuitos trifásicos, el objetivo básico ha sido el de conseguir un texto de aplicación de conocimientos de fácil comprensión y orientado a facilitar al lector criterios y base para la resolución de distintos problemas. Así mismo, pretende dar un enfoque eminentemente práctico.

Los problemas propuestos se han resuelto de forma detallada, explicando todos y cada uno de los pasos seguidos. Sin embargo, se presuponen una serie de conocimientos previos necesarios para el seguimiento de dichas explicaciones. Entre estos conocimientos caben citar, entre otros, las Leyes y Teoremas básicos de resolución de circuitos, conceptos asociados a las potencias definidas en los circuitos eléctricos monofásicos y trifásicos, conversión entre las distintas configuraciones de circuitos trifásicos.

Finalmente, cabe destacar que en los planes de estudios vigentes en las carreras técnicas el estudio de los circuitos trifásicos están presentes en asignaturas de Circuitos Eléctricos, Tecnología Eléctrica, Electrotecnia, etc. las cuales se imparten en la mayoría de las especialidades de cada titulación. Así mismo, en los futuros planes de estudios enmarcados dentro del EEES (Espacio Europeo de Educación Superior), el estudio de los circuitos trifásicos estarán presentes de forma muy destacada en asignaturas relacionas tanto con la ingeniería eléctrica como con otras especialidades. Por consiguiente es una obra que no solo resulta útil en la actualidad sino que será de gran importancia con los nuevos planes de estudio en los que el trabajo del alumno tendrá una mayor peso.

El texto se organiza exponiendo el enunciado de cada problema y, a continuación del mismo, su resolución detallada. En la explicación de los problemas planteados se utilizan las convenciones y criterios de signos, así como la simbología empleada habitualmente en los textos similares de Ingeniería Eléctrica. No obstante, se explican a continuación algunos criterios concretos que pudieran ser diferentes en otras obras similares.

- **Tensiones de los sistemas trifásicos**: Los sistemas trifásicos se caracterizan habitualmente por su tensión de línea (o tensión compuesta). En los sistemas trifásicos de baja tensión, es usual que se indique, además de la tensión de línea, la tensión de fase (o tensión simple). No obstante, en la mayoría de aplicaciones prácticas se emplea únicamente el valor correspondiente a la tensión de línea para caracterizar el sistema trifásico. En este sentido, muchos de los problemas planteados utilizan este último criterio de identificar el sistema trifásico sólo con un valor de tensión, que es la tensión de línea.

- **Identificación de cargas trifásicas**: Las cargas trifásicas que se utilizan en muchos de los problemas están formadas por receptores monofásicos conectados convenientemente. Cuando estas cargas están formadas por dos o tres impedancias, denominadas por ejemplo $\overline{Z_i}$, se referencian en el texto como carga i.

- **Conexiones de vatímetros**: Las medidas realizadas por los vatímetros dependen de las conexiones de los bornes correspondientes a la bobina voltimétrica y los correspondientes a la bobina amperimétrica. La lectura de estos instrumentos es proporcional al producto de la tensión, la intensidad medida y el coseno del ángulo que forman dichas magnitudes. Para evaluar correctamente el citado ángulo, es preciso tener en cuenta la conexión de los terminales correspondientes en el vatímetro.

  Con el objeto de simplificar los dibujos, en esta obra se ha omitido la identificación de los terminales correspondientes. Sin embargo, se ha seguido el criterio de que el terminal de la izquierda de la bobina amperimétrica sea correspondiente con el terminal superior de la bobina voltimétrica.

Los autores

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

El circuito trifásico de la Figura 1 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa de 380 V. Sabiendo que $\overline{Z}$=10∠36,87° Ω, y tomando $\overline{U}_{RN}$ como origen de fases, obtener $\overline{I}_R$, $\overline{I}_S$, $\overline{I}_T$ e $\overline{I}_N$, en las siguientes condiciones:

1. K_1 y K_2 cerrados.

2. K_1 abierto y K_2 cerrado.

3. K_1 cerrado y K_2 abierto.

4. K_1 y K_2 abiertos.

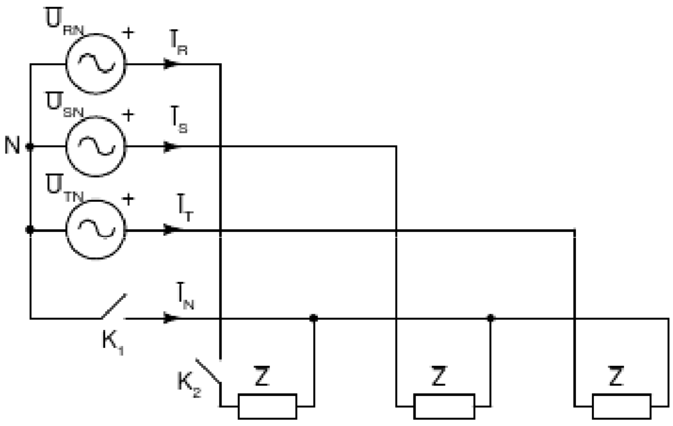


Figura 1

SOLUCIÓN 1

1. Como K_2 está cerrado entonces el sistema trifásico está equilibrado (generador y carga equilibrada). En esta situación, independientemente del estado de K_1, el neutro del generador y el neutro de las cargas se encuentran al mismo potencial. De esta forma:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}} = \frac{380/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{10\angle 36{,}87^\circ} = \frac{38}{\sqrt{3}}\angle -36{,}87^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_S = \frac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}} = \frac{380/\sqrt{3}\angle -120^\circ}{10\angle 36{,}87^\circ} = \frac{38}{\sqrt{3}}\angle -156{,}87^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_T = \frac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}} = \frac{380/\sqrt{3}\angle 120^\circ}{10\angle 36{,}87^\circ} = \frac{38}{\sqrt{3}}\angle 83{,}13^\circ \text{ A}$$

Como el sistema está equilibrado, $\overline{I}_R$, $\overline{I}_S$, $\overline{I}_T$ formarán un sistema trifásico equilibrado y, en consecuencia, la intensidad por el neutro es nula:

$$\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = -\overline{I}_N = 0$$

2. En este caso, el sistema sigue estando equilibrado, siendo indiferente que el interruptor del neutro esté abierto o cerrado ya que, como se ha dicho, los neutros en un sistema equilibrado están al mismo potencial. Por tanto los resultados de este apartado son los mismos que los del apartado anterior.

3. Cuando K_2 está abierto, la intensidad que circula por la fase R es nula y además la carga ya no estará equilibrada. Sin embargo, como K_1 se encuentra cerrado entonces el neutro del generador se encuentra unido rígidamente al neutro de las cargas monofásicas. En esta situación:

$$\overline{I}_R = 0 \text{ A}$$
$$\overline{I}_S = \frac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}} = \frac{380/\sqrt{3}\angle -120^\circ}{10\angle 36{,}87^\circ} = \frac{38}{\sqrt{3}}\angle -156{,}87^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_T = \frac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}} = \frac{380/\sqrt{3}\angle 120^\circ}{10\angle 36{,}87^\circ} = \frac{38}{\sqrt{3}}\angle 83{,}13^\circ \text{ A}$$

La intensidad que circula por el neutro se calcula como sigue:

$$\overline{I}_N = -(\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T) = -(\frac{38}{\sqrt{3}}\angle -156{,}87^\circ + \frac{38}{\sqrt{3}}\angle 83{,}13^\circ)$$
$$= \frac{38}{\sqrt{3}}\angle -36{,}87^\circ \text{ A}$$

4. Ya se ha dicho en el apartado anterior que si K_2 está abierto la carga no estará equilibrada. Si además K_1 está abierto entonces el neutro de la carga no coincidirá en general con el neutro del generador. En estas condiciones, el circuito resultante se muestra en la Figura 2, según la cual:

$$\overline{U}_{ST} = \overline{U}_{SN} - \overline{U}_{TN} = 2 \cdot \overline{Z} \cdot \overline{I}_S$$
$$\overline{I}_S + \overline{I}_T = 0$$

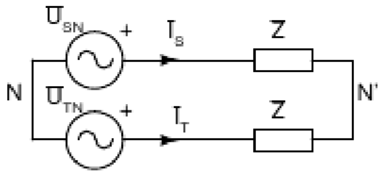


Figura 2

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$\overline{I}_S = \frac{\overline{U}_{ST}}{2 \cdot \overline{Z}} = \frac{380/\sqrt{3}\angle -120^\circ - 380/\sqrt{3}\angle 120^\circ}{2 \cdot 10\angle 36{,}87^\circ} = 19\angle -126{,}87^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_T = -\overline{I}_S = 19\angle 53{,}13^\circ \text{ A}$$

Es evidente que tanto la intensidad por la fase R como por el neutro son nulas. Además, se puede comprobar que la tensión entre los neutros, $\overline{U}_{N'N}$, es distinta de cero:

$$\overline{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}}}{\dfrac{1}{\overline{Z}} + \dfrac{1}{\overline{Z}}} = -\frac{\overline{U}_{RN}}{2} = -\frac{380}{2 \cdot \sqrt{3}}\angle 0^\circ \text{ V}$$

o bien:

$$\overline{U}_{N'N} = \overline{U}_{SN} - \overline{Z} \cdot \overline{I}_S = \overline{U}_{SN} - \frac{\overline{U}_{ST}}{2} = \overline{U}_{SN} - \frac{\overline{U}_{SN} - \overline{U}_{TN}}{2}$$
$$= \frac{\overline{U}_{SN} + \overline{U}_{TN}}{2} = -\frac{\overline{U}_{RN}}{2}$$

PROBLEMA 2

El circuito trifásico de la Figura 3 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa de 400 V. Sabiendo que R=10 Ω, X=20 Ω, obtener la lectura del amperímetro en las siguientes condiciones:

1. K_1 cerrado y K_2 y K_3 abiertos.

2. K_1 y K_2 abiertos y K_3 cerrado.

3. K_1, K_2 y K_3 abiertos.

4. K_1 y K_3 abiertos y K_2 cerrado.

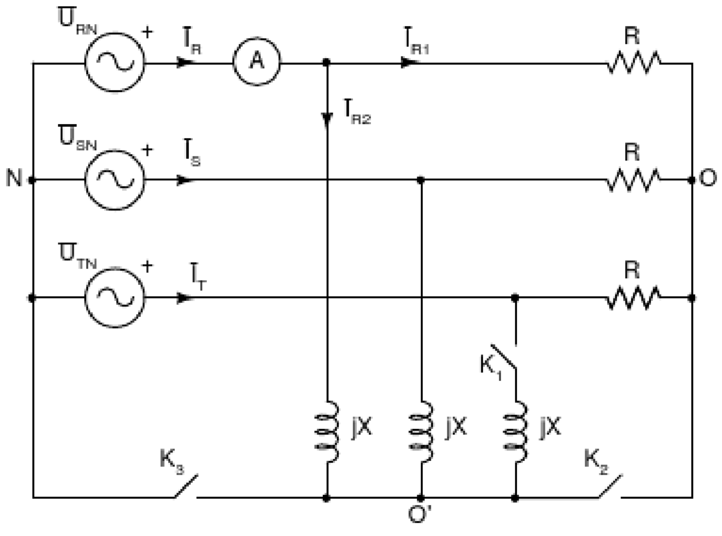


Figura 3

SOLUCIÓN 2

1. Cuando K_1 está cerrado y K_2 y K_3 abiertos, el sistema trifásico está equilibrado y, por ello, el neutro de cada carga y el neutro del generador están al mismo potencial. En estas circunstancias, la intensidad que circula por la fase R de cada una de las cargas es:

$$\overline{I}_{R1} = \frac{\overline{U}_{RO}}{R} = \frac{\overline{U}_{RN}}{R} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{10} = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_{R2} = \frac{\overline{U}_{RO'}}{jX} = \frac{\overline{U}_{RN}}{jX} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{20\angle 90^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}}\angle -90^\circ \text{ A}$$

La intensidad que circula por la fase R del generador será la suma de $\overline{I}_{R1}$ e $\overline{I}_{R2}$:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{R1} + \overline{I}_{R2} = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ + \frac{20}{\sqrt{3}}\angle -90^\circ \approx 25{,}82\angle -26{,}57^\circ \text{ A}$$

La lectura del amperímetro es de $25{,}82$ A.

2. Si K_1 está abierto, la carga inductiva está desequilibrada, y como K_3 está cerrado su neutro se encuentra rígidamente unido al neutro del generador. De esta forma, $\overline{I}_{R2}$ es la misma que la calculada en el apartado anterior:

$$\overline{I}_{R2} = \frac{20}{\sqrt{3}}\angle -90^\circ \text{ A}$$

En este caso particular en el que no existe impedancia de línea entre el generador y las cargas, al abrir el interruptor K_2 la carga resistiva sigue sometida a un sistema trifásico equilibrado de tensiones, aunque el sistema trifásico de intensidades que circula por el generador está desequilibrado. Por lo tanto, los neutros N y O se encuentran al mismo potencial, e $\overline{I}_{R1}$ será la misma que la calculada en el apartado anterior:

$$\overline{I}_{R1} = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ \text{ A}$$

La lectura del amperímetro coincide con la del apartado anterior, es decir $25{,}82$ A.

3. Cuando todos los interruptores se encuentran abiertos, sólo hay que calcular $\overline{I}_{R2}$ ya que $\overline{I}_{R1}$, por los mismos razonamientos que el apartado anterior no varía.

Según el circuito simplificado de la Figura 4:

$$\overline{I}_{R2} = \frac{\overline{U}_{RS}}{2 \cdot jX} = \frac{400\angle 30^\circ}{40\angle 90^\circ} = 10\angle -60^\circ \text{ A}$$

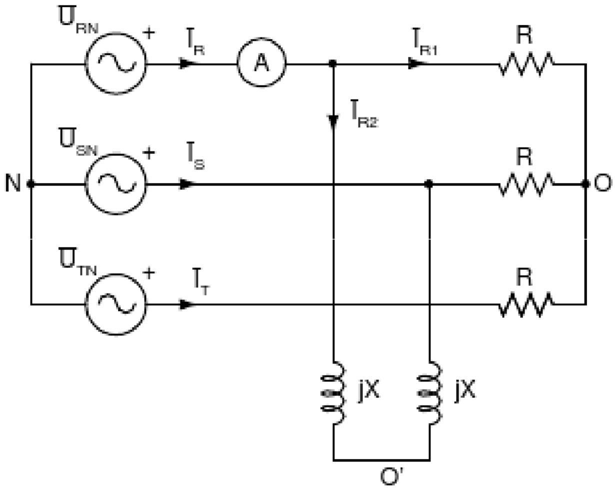


Figura 4

Por tanto:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{R1} + \overline{I}_{R2} = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ + 10\angle -60^\circ \approx 29{,}4\angle -17{,}13^\circ\ \mathrm{A}$$

y la lectura del amperímetro es de $29{,}4$ A.

4. El circuito resultante cuando K_1 y K_3 están abiertos y K_2 está cerrado es el mostrado en la Figura 5.

Teniendo en cuenta que los neutros O y O' se encuentran unidos rígidamente, se obtiene el circuito simplificado de la Figura 6, donde:

$$\overline{\overline{Z}} = R//jX = \frac{jRX}{R+jX} = \frac{j200}{10+j20} \approx 8{,}94\angle 26{,}57^\circ\ \Omega$$

Según la Figura 6, la tensión entre el neutro de la carga (O) y el neutro del generador (N) se puede calcular aplicando el teorema de Millman:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{\overline{Z}}} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{\overline{Z}}} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{R}}{\dfrac{1}{\overline{\overline{Z}}} + \dfrac{1}{\overline{\overline{Z}}} + \dfrac{1}{R}}$$

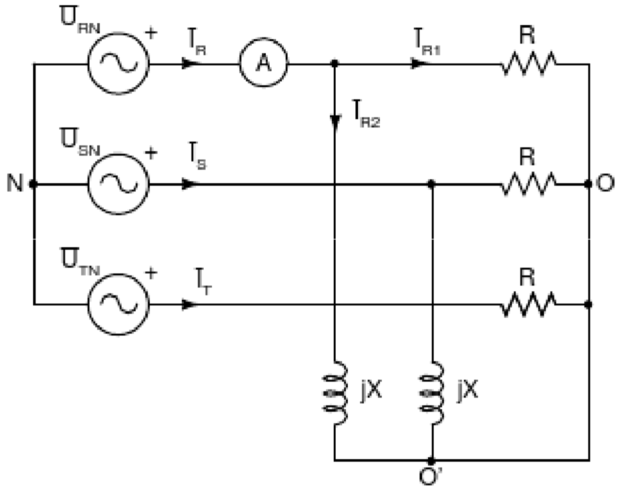


Figura 5

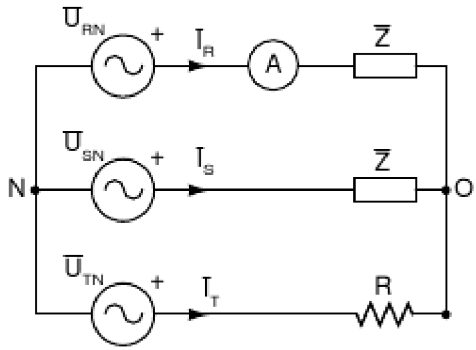


Figura 6

Sustituyendo valores resulta:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{\dfrac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{8{,}94\angle 26{,}57^\circ} + \dfrac{400/\sqrt{3}\angle -120^\circ}{8{,}94\angle 26{,}57^\circ} + \dfrac{400/\sqrt{3}\angle 120^\circ}{10}}{\dfrac{1}{8{,}94\angle 26{,}57^\circ} + \dfrac{1}{8{,}94\angle 26{,}57^\circ} + \dfrac{1}{10}}$$
$$\approx 36{,}51\angle -131{,}57^\circ \text{ V}$$

Una vez obtenida la tensión entre O y N, entonces:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN} - \overline{U}_{ON}}{\overline{Z}} = \frac{(400/\sqrt{3})\angle 0^\circ - 36{,}51\angle -131{,}57^\circ}{8{,}94\angle 26{,}57^\circ}$$
$$\approx 28{,}71\angle -20{,}46^\circ \text{ A}$$

y la lectura del amperímetro es de 28,71 A

PROBLEMA 3

Del circuito de la Figura 7 se sabe que, con los interruptores abiertos, el voltímetro marca $100\,\text{V}$ y el vatímetro $1\,500\,\text{W}$. Con los interruptores cerrados determinar X sabiendo que el generador trabaja con un factor de potencia de $0{,}8944$.

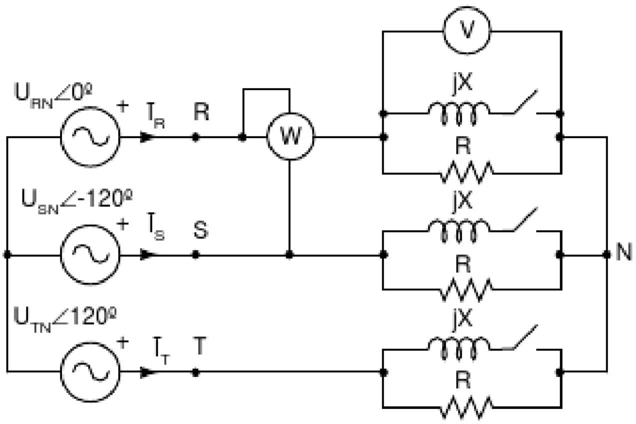


Figura 7

SOLUCIÓN 3

Con los interruptores abiertos el sistema trifásico se encuentra equilibrado, de forma que a partir de la lectura del voltímetro se puede calcular la tensión de línea de alimentación a la carga:

$$U_{RS} = \sqrt{3} \cdot U_{RN} = \sqrt{3} \cdot 100$$

Además, según la Figura 7 y 8 la lectura del vatímetro es la siguiente:

$$W = U_{RS} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_R}) = U_{RS} \cdot I_R \cdot \cos(30^\circ + \varphi)$$

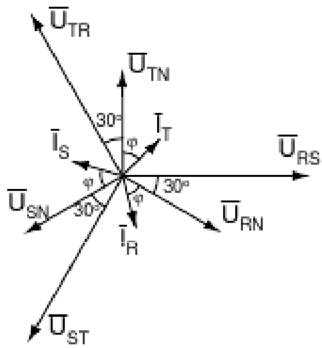


Figura 8

Con los interruptores abiertos la carga es resistiva pura y entonces $\varphi = 0$. Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$I_R = \frac{W}{U_{RS} \cdot \cos 30^\circ} = \frac{1\,500}{\sqrt{3} \cdot 100 \cdot \cos 30^\circ} = 10\,\mathrm{A}$$

En esta situación, la potencia activa consumida por la carga resistiva es:

$$P = 3 \cdot U_{RN} \cdot I_R = 3 \cdot 100 \cdot 10 = 3\,000\,\mathrm{W}$$

Con los interruptores cerrados el sistema sigue estando equilibrado y además la potencia activa que consume la carga es la misma que con los interruptores abiertos. Sabiendo que el factor de potencia del generador es de $0{,}8944$ entonces se puede obtener la potencia reactiva que consume la carga:

$$Q = P \cdot \tan \varphi_g = 3\,000 \cdot \tan\left(\arccos 0{,}8944\right) = 1\,500\,\mathrm{var}$$

En consecuencia, la inductancia de la carga se obtiene como sigue:

$$Q = 3 \cdot \frac{U_{RN}^2}{X} \implies X = \frac{3 \cdot U_{RN}^2}{Q} = \frac{3 \cdot 100^2}{1\,500} = 20\,\Omega$$

PROBLEMA 4

El circuito de la Figura 9 se encuentra alimentado por un sistema de tensiones trifásico, equilibrado y de secuencia directa, de $400\,\mathrm{V}$. Se sabe que W_2=$200\,\mathrm{W}$, que el amperímetro mide $10\,\mathrm{A}$, que R_L=$0{,}5\,\Omega$ y que la lectura del vatímetro 1 es negativa. Calcular:

1. La impedancia $\overline{Z}$.
2. La lectura del vatímetro 1.
3. La capacidad del banco trifásico de condensadores (con conexión estrella) que es necesario instalar para que el factor de potencia global de la instalación sea de $0{,}98$ inductivo.

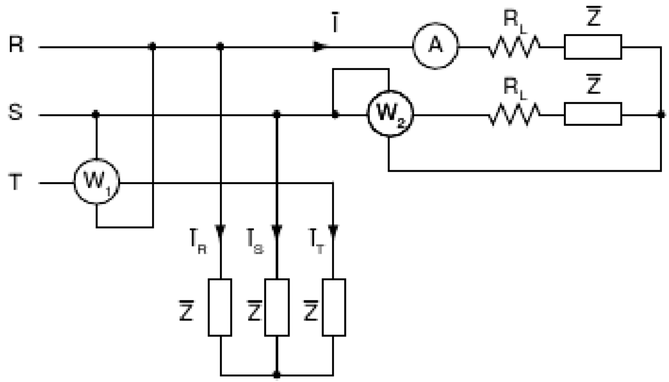


Figura 9

SOLUCIÓN 4

1. Según la Figura 9, el vatímetro 2 está midiendo la potencia activa consumida por la impedancia $\overline{Z}$ y por la resistencia R_L:

$$W_2 = P_L + P_Z = 200\,\mathrm{W}$$

A su vez:

$$P_L = R_L \cdot I^2 = 0{,}5 \cdot 10^2 = 50\,\mathrm{W}$$
$$P_Z = R_Z \cdot I^2 = R_Z \cdot 10^2 = 100 \cdot R_Z$$

En consecuencia:

$$200 = 50 + 100 \cdot R_Z \quad \Rightarrow \quad R_Z = \frac{200 - 50}{100} = 1{,}5\,\Omega$$

Por otro lado, a partir de la Figura 9 se tiene lo siguiente:

$$\overline{U}_{RS} = 2 \cdot (\overline{Z} + R_L) \cdot \overline{I} = 2 \cdot (R_L + R_Z + j \cdot X_Z) \cdot \overline{I}$$

Igualando los módulos de ambos miembros de la ecuación, resulta:

$$U_{RS} = 2 \cdot I \cdot \sqrt{(R_L + R_Z)^2 + X_Z^2}$$

y sustituyendo valores se tiene,

$$400 = 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{(0{,}5 + 1{,}5)^2 + X_Z^2} \quad \Rightarrow \quad 400 = 4 + X_Z^2$$

Resolviendo, se obtienen los posibles valores de X_Z:

$$X_Z \approx \pm 19{,}9\,\Omega$$

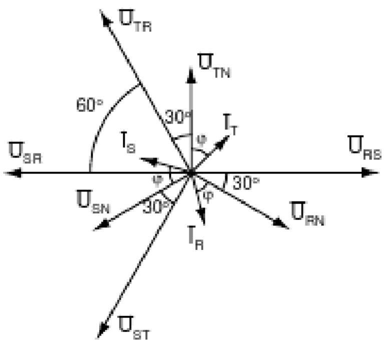


Figura 10

Para saber el carácter de la impedancia $\overline{Z}$ es necesario analizar la lectura del vatímetro 1. Según la Figura 9 y 10:

$$\begin{aligned} W_1 &= U_{SR} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{SR}, \overline{I}_T}) = U_{SR} \cdot I_T \cdot \cos(90^\circ + \varphi) \\ &= -U_{SR} \cdot I_T \cdot \sin\varphi = \frac{-Q_{3Z}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

donde Q_{3Z} es la potencia reactiva absorbida por la carga trifásica equilibrada $\overline{Z}$ y φ es el ángulo de dicha carga.

Como la lectura del vatímetro 1 es negativa implica que Q_{3Z} es positiva y por tanto la impedancia $\overline{Z}$ tiene carácter inductivo (absorbe potencia reactiva).

Por tanto, la impedancia $\overline{Z}$ es la siguiente:

$$\overline{Z} = R_Z + j \cdot X_Z = 1{,}5 + j \cdot 19{,}9 \approx 19{,}95\angle 85{,}69^\circ\ \Omega$$

2. Del apartado anterior, la lectura del vatímetro 1 es la siguiente:

$$W_1 = \frac{-Q_{3Z}}{\sqrt{3}}$$

donde Q_{3Z} se puede obtener según la siguiente expresión:

$$Q_{3Z} = 3 \cdot X_Z \cdot I_R^2 = 3 \cdot X_Z \cdot I_S^2 = 3 \cdot X_Z \cdot I_T^2$$

A su vez:

$$I_R = I_S = I_T = \frac{U_F}{Z} = \frac{400/\sqrt{3}}{\sqrt{1{,}5^2 + 19{,}9^2}} \approx 11{,}57\,\mathrm{A}$$

Por tanto,

$$Q_{3Z} = 3 \cdot 19{,}9 \cdot 11{,}57^2 \approx 7\,992\,\mathrm{var}$$

y la lectura del vatímetro 1 es:

$$W_1 = \frac{-7\,992}{\sqrt{3}} \approx -4\,614$$

3. La potencia activa y reactiva total que absorbe el sistema trifásico es:

$$\begin{aligned} P_T &= P_{3Z} + 2 \cdot (P_Z + P_L) = \frac{Q_{3Z}}{\tan \varphi_Z} + 2 \cdot (R_Z + R_L) \cdot I^2 = \\ &= \frac{7\,992}{\tan(85{,}69^\circ)} + 2 \cdot (1{,}5 + 0{,}5) \cdot 10^2 \approx 1\,002{,}32\,\mathrm{W} \\ Q_T &= Q_{3Z} + 2 \cdot Q_Z = Q_{3Z} + 2 \cdot X_Z \cdot I^2 = \\ &= 7\,992 + 2 \cdot 19{,}9 \cdot 10^2 = 11\,972\,\mathrm{var} \end{aligned}$$

Obteniendo así el siguiente factor de potencia del sistema sin compensar:

$$fdp = \frac{P_T}{\sqrt{P_T^2 + Q_T^2}} = \frac{1\,002{,}32}{\sqrt{1\,002{,}32^2 + 11\,972^2}} \approx 0{,}0834$$

Para que el factor de potencia global de la instalación pase a ser 0,98, la red tiene que suministrar la misma potencia activa que anteriormente pero, sin embargo, sólo tiene que suministrar la siguiente potencia reactiva:

$$fdp = 0{,}98 = \frac{P_T}{\sqrt{P_T^2 + Q_T'^2}} \implies$$

$$Q_T' = \sqrt{\left(\frac{P_T}{0{,}98}\right)^2 - P_T^2} = \sqrt{\left(\frac{1\,002{,}32}{0{,}98}\right)^2 - 1\,002{,}32^2} \approx 203{,}53 \text{ var}$$

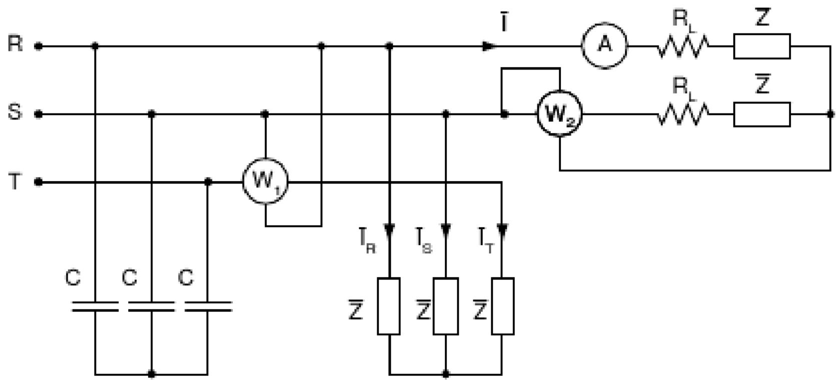


Figura 11

El resto de la potencia reactiva hasta completar las necesidades de la carga, la tiene que aportar el banco de condensadores, conectado según la Figura 11:

$$Q_C = Q_T - Q_T' = 11\,972 - 203{,}53 = 11\,768{,}47 \text{ var}$$

Como el banco de condensadores ha de estar conectado en estrella (según el enunciado), entonces:

$$Q_C = 3 \cdot \frac{U_F^2}{X_C} = 3 \cdot U_F^2 \cdot \omega \cdot C = U_L^2 \cdot 2\pi \cdot f \cdot C$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$C = \frac{Q_C}{U_L^2 \cdot 2\pi \cdot f} = \frac{11\,768{,}47}{400^2 \cdot 2\pi \cdot 50} \approx 234{,}13\,\mu\text{F}$$

PROBLEMA 5

Del circuito trifásico de la Figura 12, equilibrado y de secuencia inversa, se conocen las lecturas de los vatímetros: W_1=1 500 W, W_2=800 W y W_3=600 W, y que la carga 1 tiene un factor de potencia de 0,8 (inductivo). Calcular:

1. Las potencias, activa y reactiva, de la carga 1, indicando si son absorbidas o cedidas.

2. Las potencias, activa y reactiva, de la carga 2, indicando si son absorbidas o cedidas.

3. La lectura del amperímetro, sabiendo que la tensión de alimentación es de 400 V.

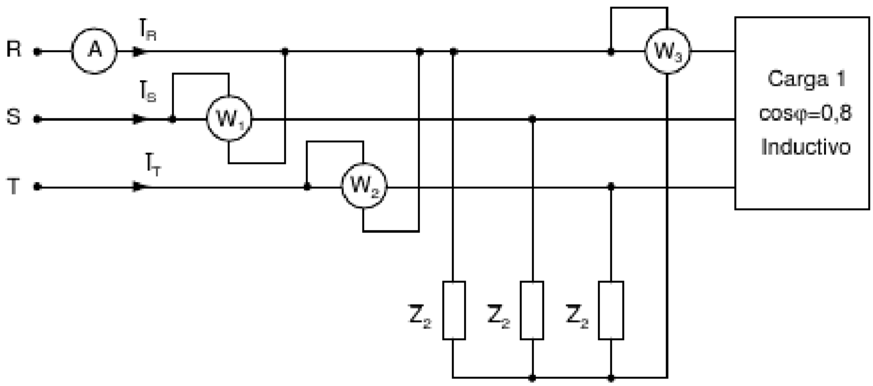


Figura 12

SOLUCIÓN 5

1. Como el sistema está equilibrado, el neutro de la conexión estrella equivalente de la carga 1 y el neutro de la carga trifásica formada por las impedancias $\overline{Z}_2$ (a la que se llamará carga 2) están al mismo potencial. De esta forma, la bobina voltimétrica del vatímetro 3 está midiendo la tensión entre la fase y el neutro de la carga 1. Por tanto dicho vatímetro mide la potencia activa de una de las fases de la carga 1:

$$W_3 = \frac{P_1}{3} \implies P_1 = 3 \cdot 600 = 1\,800\,\mathrm{W}$$

Además, de la carga 1 se conoce el factor de potencia y su carácter, de forma que se puede calcular la potencia reactiva, que en este caso será absorbida ya que es inductiva:

$$Q_1 = P_1 \cdot \tan\varphi_1 = 1\,800 \cdot \tan(\arccos 0{,}8) = 1\,350\,\text{var}$$

2. Según el diagrama fasorial de la Figura 13, las lecturas de los vatímetros 1 y 2 son las siguientes:

$$W_1 = U_{SR} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{SR}, \overline{I}_S}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30^\circ + \varphi)$$
$$W_2 = U_{TR} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TR}, \overline{I}_T}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\varphi - 30^\circ)$$

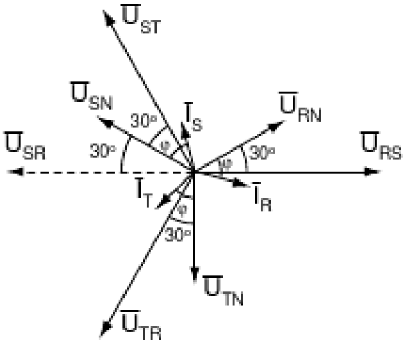


Figura 13

Si se suman las lecturas de ambos vatímetros se obtiene la potencia activa trifásica consumida por las cargas 1 y 2:

$$W_1 + W_2 = U_L \cdot I_L \cdot [\cos(30^\circ + \varphi) + \cos(\varphi - 30^\circ)] = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P_{12}$$

Si ahora se restan las lecturas de ambos vatímetros se obtiene la potencia reactiva trifásica consumida por las cargas 1 y 2:

$$W_2 - W_1 = U_L \cdot I_L \cdot [\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(30^\circ + \varphi)] = U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi = \frac{Q_{12}}{\sqrt{3}}$$

Por tanto:

$$P_{12} = W_1 + W_2 = 1\,500 + 800 = 2\,300\,\text{W}$$
$$Q_{12} = \sqrt{3} \cdot (W_2 - W_1) = \sqrt{3} \cdot (800 - 1\,500) = -\sqrt{3} \cdot 700\,\text{var}$$

Como las potencias, activa y reactiva, absorbidas por la carga 1 ya se han calculado previamente, entonces:

$$P_2 = P_{12} - P_1 = 2\,300 - 1\,800 = 500\,\mathrm{W}$$
$$Q_2 = Q_{12} - Q_1 = -\sqrt{3} \cdot 700 - 1\,350 \approx -2\,562{,}44\,\mathrm{var}$$

En resumen, la carga 2 absorbe potencia activa y cede potencia reactiva.

3. Conocidas las potencias, activa y reactiva, totales del conjunto de las cargas 1 y 2, se puede obtener la potencia aparente:

$$S_{12} = \sqrt{P_{12}^2 + Q_{12}^2} = \sqrt{2\,300^2 + (\sqrt{3} \cdot 700)^2} = 2\,600\,\mathrm{VA}$$

A su vez, la potencia aparente se puede expresar en función de la tensión e intensidad de línea según:

$$S_{12} = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L$$

Como la tensión de alimentación es de 400 V entonces la lectura del amperímetro es:

$$I_L = \frac{S_{12}}{\sqrt{3} \cdot U_L} = \frac{2\,600}{\sqrt{3} \cdot 400} \approx 3{,}75\,\mathrm{A}$$

PROBLEMA 6

El circuito trifásico de la Figura 14 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa de 400 V. Con todos los interruptores cerrados, las lecturas de los vatímetros son: W_1=5 171 W y W_2=−371 W. Se pide:

1. Hallar el valor de R y de X.

2. Con todos los interruptores abiertos, hallar las lecturas de los vatímetros.

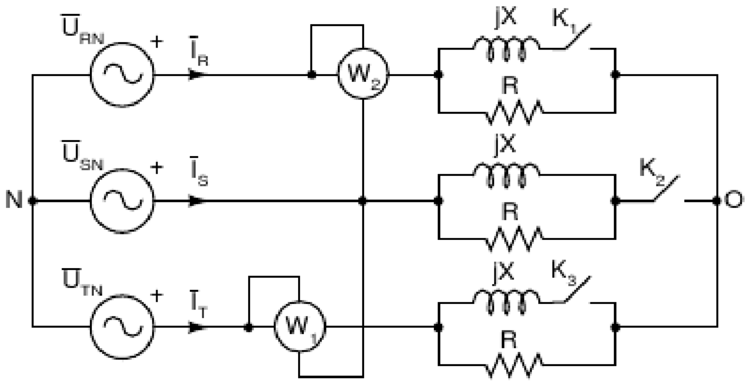


Figura 14

Solución 6

Según la Figura 14, la lectura de ambos vatímetros es la siguiente:

$$W_1 = U_{TS} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TS}, \overline{I}_T})$$
$$W_2 = U_{RS} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_R})$$

Considerando que la carga está equilibrada se obtiene el diagrama fasorial de la Figura 15, a partir del cual se pueden hallar los desfases correspondientes a las tensiones e intensidades, resultando:

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30^\circ - \varphi) \\ W_2 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30^\circ + \varphi) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} W_1 + W_2 = P \\ W_1 - W_2 = \dfrac{Q}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

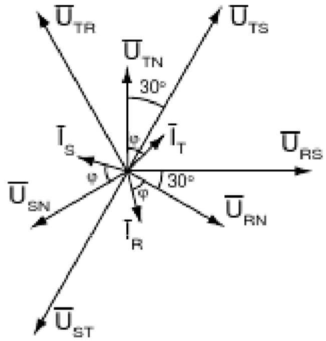


Figura 15

Si la carga estuviera desequilibrada entonces:

$$W_1 + W_2 = P$$

no pudiéndose afirmar nada sobre la potencia reactiva.

1. Con los interruptores cerrados el sistema trifásico resultante está equilibrado. Por tanto, a partir de las lecturas de los dos vatímetros se pueden obtener las potencias, activa y reactiva, absorbidas por la carga trifásica:

$$P = W_1 + W_2 = 5\,171 - 371 = 4\,800\,\mathrm{W}$$
$$Q = \sqrt{3} \cdot (W_1 - W_2) = \sqrt{3} \cdot (5\,171 + 371) \approx 9\,599\,\mathrm{var}$$

Por otro lado, tanto la potencia activa como la potencia reactiva, absorbidas por la carga, se pueden expresar en función de R y X según:

$$P = 3 \cdot \frac{U_F^2}{R} \quad ; \quad Q = 3 \cdot \frac{U_F^2}{X}$$

Despejando y sustituyendo valores se obtiene el valor de R y de X:

$$R = 3 \cdot \frac{U_F^2}{P} = 3 \cdot \frac{(400/\sqrt{3})^2}{4\,800} \approx 33.\hat{3}\,\Omega$$
$$X = 3 \cdot \frac{U_F^2}{Q} = 3 \cdot \frac{(400/\sqrt{3})^2}{9\,599} \approx 16{,}7\,\Omega$$

2. En la Figura 16 se muestra el circuito resultante cuando todos los interruptores están abiertos.

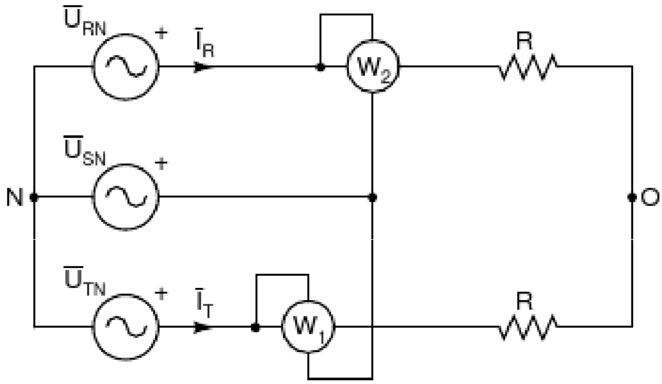


Figura 16

Según la Figura 16:

$$\overline{I}_R = \frac{-\overline{U}_{TR}}{2 \cdot R} = \frac{-400\angle 120^\circ}{2 \cdot 33.\hat{3}} = 6\angle -60^\circ \text{ A}$$

En consecuencia, la lectura de cada uno de los vatímetros es la siguiente:

$$W_2 = U_{RS} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_R}) = 400 \cdot 6 \cdot \cos(0^\circ + 60^\circ) = 1\,200 \text{ W}$$

$$W_1 = P - W_2 = 2 \cdot R \cdot I_R^2 - W_2 = 2 \cdot 33.\hat{3} \cdot 6^2 - 1\,200 = 1\,200 \text{ W}$$

Otra forma de obtener la lectura del vatímetro 1 es a partir de su tensión e intensidad:

$$\begin{aligned} W_1 &= U_{TS} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TS}, \overline{I}_T}) = U_{TS} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TS}, (-\overline{I}_R)}) \\ &= 400 \cdot 6 \cdot \cos(60^\circ - 120^\circ) = 1\,200 \text{ W} \end{aligned}$$

PROBLEMA 7

El circuito trifásico de la Figura 17 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa de 220 V. Sabiendo que R=10 Ω, X_L=20 Ω, R_1=30 Ω y X_{L_1}=60 Ω, obtener las lecturas de los vatímetros cuando:

1. K_1 y K_2 están abiertos.
2. K_1 está cerrado y K_2 está abierto.
3. K_1 está abierto y K_2 está cerrado.

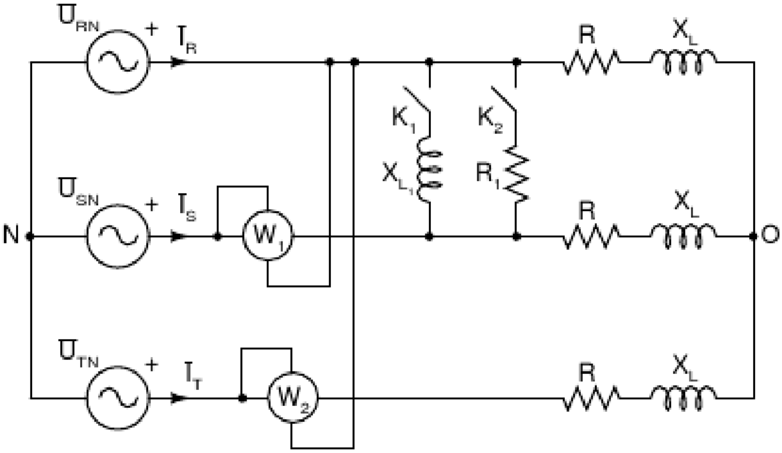


Figura 17

Solución 7

1. Como K_1 y K_2 están abiertos, el sistema trifásico resultante está equilibrado y tanto el neutro de la carga (O) como el neutro del generador (N) están al mismo potencial. En esta situación, la intensidad de línea se calcula como sigue:

$$I_L = \frac{U_F}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{220/\sqrt{3}}{\sqrt{10^2 + 20^2}} \approx 5{,}68\,\text{A}$$

La potencia activa y reactiva absorbida por la carga es:

$$P = 3 \cdot R \cdot I_L^2 = 3 \cdot 10 \cdot 5{,}68^2 \approx 968\,\text{W}$$
$$Q = 3 \cdot X_L \cdot I_L^2 = 3 \cdot 20 \cdot 5{,}68^2 \approx 1\,936\,\text{var}$$

Es fácil comprobar que W_1 y W_2 se encuentran dispuestos según el método de los dos vatímetros y, como el sistema está equilibrado y es de secuencia directa, entonces:

$$W_1 + W_2 = P = 968$$
$$W_1 - W_2 = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{1\,936}{\sqrt{3}}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la lectura de ambos vatímetros:

$$W_1 \approx 1\,042{,}87\,\mathrm{W} \quad ; \quad W_2 \approx -74{,}87\,\mathrm{W}$$

2. Cuando K_1 está cerrado y K_2 está abierto, el sistema trifásico resultante está desequilibrado. A pesar de esto, como no existe impedancia de línea entre el generador y la carga trifásica, $R + jX_L$, ésta seguirá sometida al mismo sistema de tensiones inicial, trifásico equilibrado. De este modo, tanto la intensidad que circula por cada una de las ramas monofásicas como las potencias, activa y reactiva, que absorbe dicha carga serán iguales a las calculadas en el apartado anterior. En consecuencia, la lectura del vatímetro 2 permanece invariable respecto a la situación del apartado anterior:

$$W_2 = -74{,}87\,\mathrm{W}$$

Como X_{L_1} es una carga inductiva pura, la potencia activa del sistema no ha variado y, por tanto, la lectura de cada vatímetro es igual a la del apartado anterior.

3. Cuando K_1 está abierto y K_2 está cerrado, el sistema trifásico resultante está desequilibrado. Por las mismas razones que en el apartado anterior, la lectura del vatímetro 2 permanece invariable:

$$W_2 = -74{,}87\,\mathrm{W}$$

Igualmente, la potencia activa y reactiva que absorbe la carga trifásica, $R + jX_L$, permanece invariable.

Según el método de los dos vatímetros:

$$W_1 + W_2 = P$$

donde P es ahora la potencia absorbida, no sólo por la carga trifásica, $R + jX_L$, sino también por la resistencia R_1. Por tanto:

$$P = 968 + \frac{220^2}{30} \approx 2\,581{,}3\hat{3}\,\mathrm{W}$$

y las lecturas de ambos vatímetros son:

$$W_1 \approx 2\,656{,}21\,\mathrm{W} \quad ; \quad W_2 \approx -74{,}87\,\mathrm{W}$$

PROBLEMA 8

El circuito trifásico de la Figura 18 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa de $400\,\mathrm{V}$ de tensión de fase. Sabiendo que $\overline{Z}_1$=$10\angle 36{,}87°\ \Omega$, $\overline{Z}_2$=$20\angle -36{,}87°\ \Omega$ y R=$10\,\Omega$, obtener la lectura del amperímetro y de los voltímetros en las siguientes condiciones:

1. K_1, K_2, K_3 y K_4 abiertos.

2. K_1 abierto y K_2, K_3 y K_4 cerrados.

3. K_1 cerrado y K_2, K_3 y K_4 abiertos.

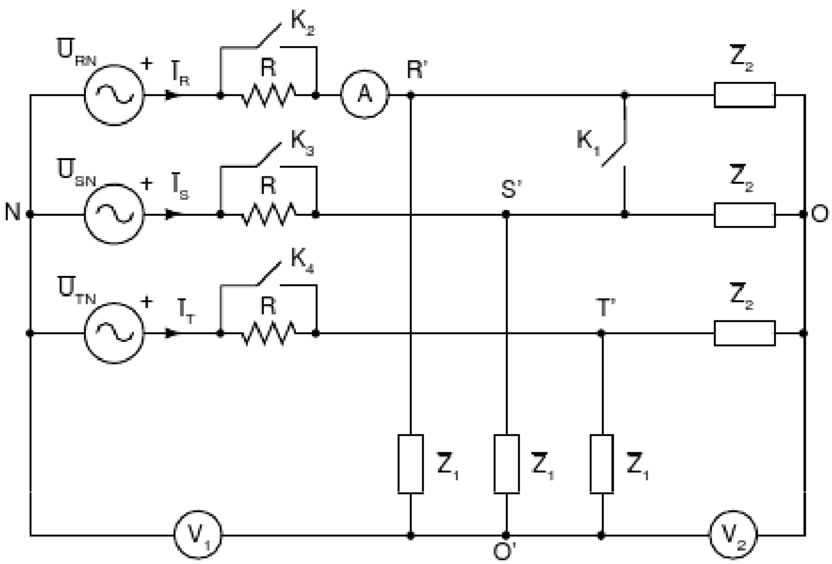


Figura 18

Solución 8

1. Cuando todos los interruptores se encuentran abiertos, el sistema se encuentra equilibrado y así

$$V_1 = V_2 = 0.$$

En estas circunstancias se puede obtener una impedancia equivalente por fase de la carga 1 y 2,

$$\begin{aligned}\overline{Z}_{eq} &= \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = \frac{10\angle 36{,}87^\circ \cdot 20\angle -36{,}87^\circ}{10\angle 36{,}87^\circ + 20\angle -36{,}87^\circ} \approx \frac{200\angle 0^\circ}{24{,}74\angle -14{,}04^\circ} \\ &\approx 8{,}08\angle 14{,}04^\circ \ \Omega.\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_{eq} + R} = \frac{400\angle 0^\circ}{8{,}08\angle 14{,}03^\circ + 10} \approx 22{,}28\angle -6{,}27^\circ \text{ A}$$

Siendo la lectura del amperímetro 22,28 A.

2. Cuando K_1 está abierto y K_2, K_3 y K_4 están cerrados, el sistema sigue estando equilibrado y en consecuencia:

$$V_1 = V_2 = 0$$

En este caso:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{400\angle 0^\circ}{8{,}08\angle 14{,}03^\circ} \approx 49{,}5\angle -14{,}03^\circ \text{ A}$$

Siendo la lectura del amperímetro 49,5 A.

3. Cuando K_1 está cerrado la carga 2 está desequilibrada y las intensidades $\overline{I}_R$, $\overline{I}_S$ e $\overline{I}_T$ formarán un sistema trifásico desequilibrado. Por otro lado, como K_2, K_3 y K_4 están abiertos, al circular las intensidades desequilibradas por cada resistencia R de la línea, el sistema trifásico de tensiones resultante en bornes de la carga 1 y 2 está desequilibrado. Por tanto, las lecturas de los dos voltímetros no serán nulas en general.

Al estar cortocircuitados dos bornes de cada una de las cargas trifásicas formadas por $\overline{Z}_1$ y $\overline{Z}_2$, quedan en paralelo las impedancias monofásicas correspondientes a la fase R' y S' de cada carga. De este modo, agrupando las

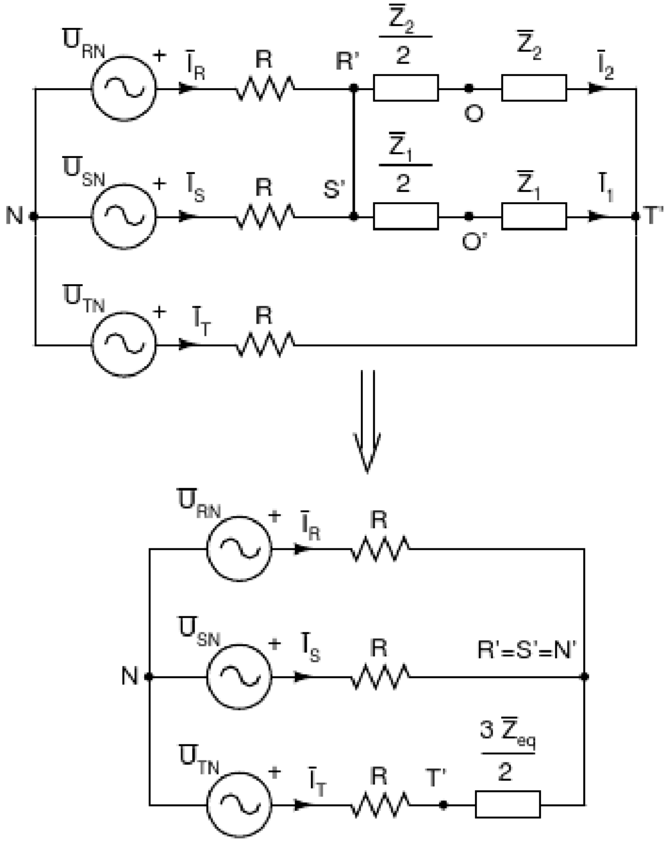


Figura 19

impedancias que resultan en paralelo y reorganizando el circuito, se obtiene el circuito simplificado de la Figura 19, donde $\overline{Z}_{eq}$ es la misma que la utilizada en apartados anteriores, es decir el paralelo de $\overline{Z}_1$ y $\overline{Z}_2$.

Según la Figura 19, la tensión entre el neutro de la carga (N') y el neutro del generador (N) se calcula como sigue:

$$\overline{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{R} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{R} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{R + \frac{3\cdot\overline{Z}_{eq}}{2}}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R + \frac{3\cdot\overline{Z}_{eq}}{2}}} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{R} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{R} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{R + \frac{3\cdot\overline{Z}_{eq}}{2}}}{\dfrac{2}{R} + \dfrac{1}{R + \frac{3\cdot\overline{Z}_{eq}}{2}}}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$\overline{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{400\angle 0^\circ}{10} + \dfrac{400\angle -120^\circ}{10} + \dfrac{400\angle 120^\circ}{10 + \frac{3\cdot 8{,}08\angle 14{,}03^\circ}{2}}}{\dfrac{2}{10} + \dfrac{1}{10 + \frac{3\cdot 8{,}08\angle 14{,}03^\circ}{2}}}$$
$$\approx \frac{22{,}08\angle -53{,}66^\circ}{0{,}25\angle -1{,}42^\circ} \approx 88{,}32\angle -52{,}24^\circ \text{ V}$$

Una vez obtenida la tensión entre N' y N, entonces:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN} - \overline{U}_{N'N}}{R} = \frac{400\angle 0^\circ - 88{,}32\angle -52{,}24^\circ}{10} \approx 35{,}29\angle 11{,}41^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_S = \frac{\overline{U}_{SN} - \overline{U}_{N'N}}{R} = \frac{400\angle -120^\circ - 88{,}32\angle -52{,}24^\circ}{10} \approx 37{,}56\angle -132{,}57^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_T = \frac{\overline{U}_{TN} - \overline{U}_{N'N}}{R + \frac{3\cdot \overline{Z}_{eq}}{2}} = \frac{400\angle 120^\circ - 88{,}32\angle -52{,}24^\circ}{10 + \frac{3\cdot 8{,}08\angle 14{,}03^\circ}{2}} \approx 22{,}21\angle 113{,}71^\circ \text{ A}$$

Siendo la lectura del amperímetro 35,29 A.

Según la Figura 19, la lectura del voltímetro 2 se calcula como sigue:

$$\overline{U}_{OO'} = \overline{U}_{OT'} - \overline{U}_{O'T'} = \overline{Z}_2 \cdot \overline{I}_2 - \overline{Z}_1 \cdot \overline{I}_1 = \overline{Z}_2 \cdot \frac{\overline{U}_{R'T'}}{\frac{3}{2}\cdot \overline{Z}_2} - \overline{Z}_1 \cdot \frac{\overline{U}_{R'T'}}{\frac{3}{2}\cdot \overline{Z}_1} = 0$$

Por lo tanto

$$V_2 = |\overline{U}_{OO'}| = 0$$

De la misma forma,

$$\overline{U}_{NO'} = R\cdot \overline{I}_S + \frac{\overline{Z}_1}{2}\cdot \overline{I}_1 - \overline{U}_{SN} = R\cdot \overline{I}_S + \frac{\overline{Z}_1}{2}\cdot \frac{\overline{U}_{R'T'}}{\frac{3}{2}\cdot \overline{Z}_1} - \overline{U}_{SN}$$
$$= R\cdot \overline{I}_S - \frac{\overline{Z}_{eq}}{2}\cdot \overline{I}_T - \overline{U}_{SN}$$
$$= 10\cdot 37{,}56\angle -132{,}57^\circ - \frac{8{,}08\angle 14{,}03^\circ}{2}\cdot 22{,}21\angle 113{,}71^\circ - 400\angle -120^\circ$$
$$\approx 1{,}43\angle -54{,}33^\circ \text{ V}$$

Siendo la lectura del voltímetro 1

$$V_1 = |\overline{U}_{NO'}| = 1{,}43 \text{ V}$$

PROBLEMA 9

El sistema trifásico de la Figura 20 se alimenta de una red de secuencia inversa de $400/690$ V. Sabiendo que $\overline{Z}$=$10\angle-36{,}87°\ \Omega$, determinar:

1. Con los interruptores abiertos, las lecturas de W_1, W_2, A_1 y A_2.
2. Con los interruptores cerrados, el valor de X que hace que el generador trabaje con un factor de potencia unidad.
3. Las lecturas de W_1, W_2, A_1 y A_2 en las condiciones del apartado anterior.

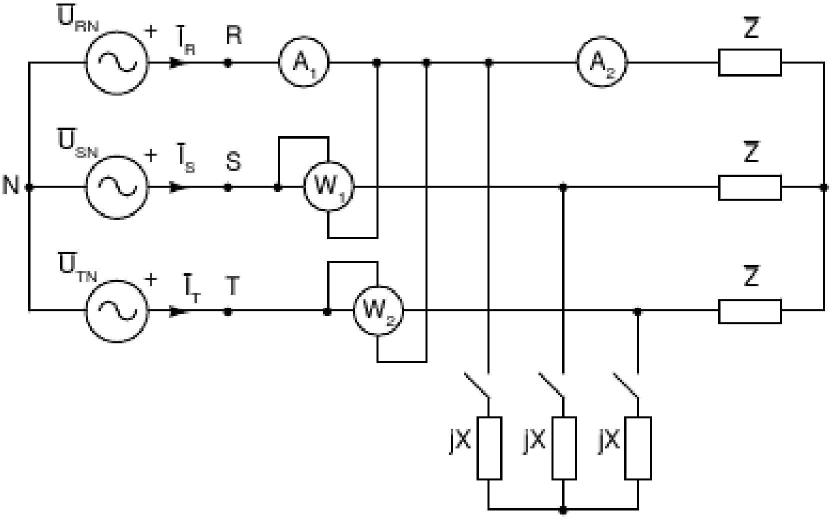


Figura 20

SOLUCIÓN 9

Según el diagrama fasorial de la Figura 21, las lecturas de los vatímetros 1 y 2 son las siguientes:

$$W_1 = U_{SR} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{SR}, \overline{I}_S}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30° + \varphi)$$

$$W_2 = U_{TR} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TR}, \overline{I}_T}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\varphi - 30°)$$

Si se suman y se restan las lecturas de ambos vatímetros se obtienen las potencias activa y reactiva trifásicas suministradas por el generador:

$$W_1 + W_2 = U_L \cdot I_L \cdot [\cos(30° + \varphi) + \cos(\varphi - 30°)] = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P_g$$

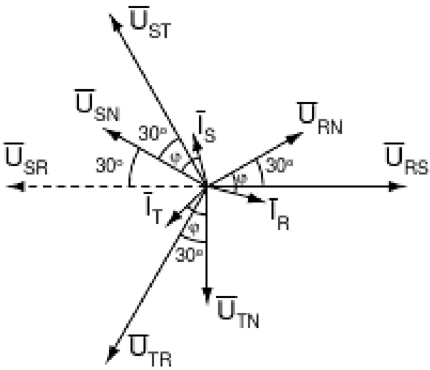


Figura 21

$$W_2 - W_1 = U_L \cdot I_L \cdot [\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(30^\circ + \varphi)] = U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi = \frac{Q_g}{\sqrt{3}}$$

Por tanto:

$$P_g = W_1 + W_2$$
$$Q_g = \sqrt{3} \cdot (W_2 - W_1)$$

1. Con los interruptores abiertos, la intensidad de línea es:

$$I_L = I_F = \frac{U_F}{Z} = \frac{400}{10} = 40\,\mathrm{A}$$

En esta situación, las lecturas de los amperímetros 1 y 2 son iguales y de valor 40 A.

Las potencias, activa y reactiva, cedidas por el generador, es decir consumidas por la carga, se calculan como sigue:

$$P_g = 3 \cdot I_L^2 \cdot Z \cdot \cos\varphi = 3 \cdot 40^2 \cdot 10 \cdot \cos(-36{,}87^\circ) = 38\,400\,\mathrm{W}$$
$$Q_g = 3 \cdot I_L^2 \cdot Z \cdot \sin\varphi = 3 \cdot 40^2 \cdot 10 \cdot \sin(-36{,}87^\circ) = -28\,800\,\mathrm{var}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} W_1 + W_2 &= 38\,400 \\ (W_2 - W_1) &= \frac{-28\,800}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} W_1 &\approx 27\,513{,}85\,\mathrm{W} \\ W_2 &\approx 10\,886{,}15\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

2. Para que la instalación trabaje con factor de potencia unidad, con los interruptores cerrados, es necesario que el generador no suministre potencia reactiva a la carga. Como la carga $\overline{Z}$ tiene carácter capacitivo entonces X tendrá que ser inductiva. El valor de X se obtiene igualando la potencia reactiva que suministra la carga capacitiva con la potencia reactiva que consume la carga X, la cual se calcula como sigue:

$$Q = 3 \cdot \frac{U_F^2}{X}$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$X = 3 \cdot \frac{U_F^2}{Q} = 3 \cdot \frac{400^2}{28\,800} \approx 16{,}6\hat{6}\,\Omega$$

3. En las condiciones del apartado anterior, las lecturas de ambos vatímetros se obtiene según:

$$\left.\begin{array}{r} W_1 + W_2 = 38\,400 \\ (W_2 - W_1) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow W_1 = W_2 = 19\,200\,\text{W}$$

La lectura del amperímetro 2 sigue siendo la misma que en el apartado 1, es decir 40 A, ya que no se modifican las condiciones de funcionamiento de la carga $\overline{Z}$.

Por otro lado, la lectura del amperímetro 1 se puede obtener a partir de la potencia aparente del generador, que en esta situación (al ser nula potencia reactiva) es igual a la potencia activa:

$$S_g = P_g = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_{L1}$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$I_{L1} = \frac{P_g}{\sqrt{3} \cdot U_L} = \frac{38\,400}{\sqrt{3} \cdot 690} \approx 32{,}13\,\text{A}$$

Por tanto, la lectura del amperímetro 1 es 32,13 A.

PROBLEMA 10

El sistema de la Figura 22 se encuentra alimentado por un sistema de tensiones trifásico, equilibrado y de secuencia directa, de 400 V. Con los interruptores abiertos la lectura de los instrumentos de medida son: W_1=865 W, W_2=635 W, W_3=116 W, W_4=167 W y A=10 A. Sabiendo que la carga 1 tiene carácter inductivo, determinar:

1. Las potencias, activa y reactiva, absorbidas o cedidas por la carga 1.
2. Las potencias, activa y reactiva, absorbidas o cedidas por la carga 2.
3. El factor de potencia equivalente de la instalación.
4. La capacidad de los condensadores para que, una vez conectados, el factor de potencia equivalente de la instalación sea de $0{,}95$ capacitivo.

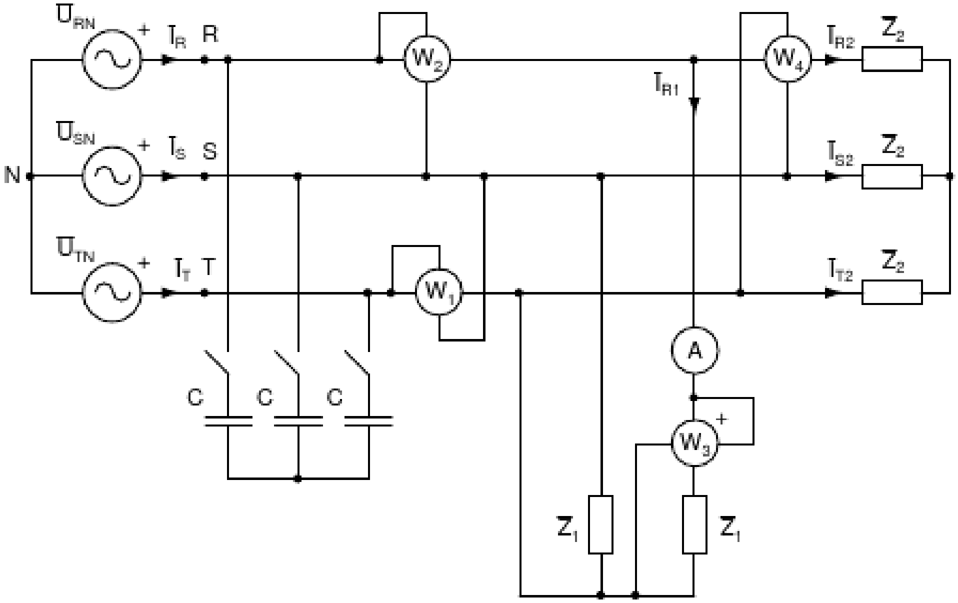


Figura 22

Solución 10

1. Según la Figura 22, el vatímetro 3 mide la potencia activa absorbida por la impedancia $\overline{Z}_1$:

$$W_3 = P_{Z_1} = 116\,\mathrm{W}$$

Por otro lado, la lectura del vatímetro 3 es:

$$W_3 = U_{RT} \cdot I_{R1} \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RT}, \overline{I}_{R1}}) = U_{RT} \cdot I_{R1} \cdot \cos\varphi_1$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$\cos\varphi_1 = \frac{W_3}{U_{RT} \cdot I_{R1}} = \frac{116}{400 \cdot 10} = 0{,}029 \implies \varphi_1 \approx 88{,}33^\circ$$

Como las dos impedancias $\overline{Z}_1$ están sometidas a la misma tensión, que en este caso es la tensión de línea del sistema trifásico, absorberán las mismas potencias, activa y reactiva. En consecuencia con lo anterior:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 2 \cdot P_{Z_1} = 2 \cdot 116 = 232\,\mathrm{W} \\
Q_1 &= P_1 \cdot \tan\varphi_1 = 232 \cdot \tan(88{,}33^\circ) \approx 7\,997\,\mathrm{var}
\end{aligned}
$$

2. Según la Figura 22, las lecturas de los vatímetros 1 y 2 son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= U_{TS} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TS}, \overline{I}_T}) \\
W_2 &= U_{RS} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_R})
\end{aligned}
$$

Como la carga 1 está desequilibrada, las intensidades de línea, $\{\overline{I}_R, \overline{I}_S, \overline{I}_T\}$, formarán un sistema trifásico desequilibrado.

La potencia activa absorbida por las cargas 1 y 2 se puede calcular a partir de la potencia compleja:

$$
P_{12} = \Re e[\overline{S}] = \Re e[\overline{U}_{RN} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{U}_{SN} \cdot \overline{I}_S^* + \overline{U}_{TN} \cdot \overline{I}_T^*]
$$

Al no haber conductor neutro, se verifica:

$$
\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0
$$

Por tanto:

$$
\begin{aligned}
P_{12} &= \Re e[\overline{S}] = \Re e[\overline{U}_{RN} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{U}_{SN} \cdot (-\overline{I}_R^* - \overline{I}_T^*) + \overline{U}_{TN} \cdot \overline{I}_T^*] \\
&= \Re e[\overline{U}_{RS} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{U}_{TS} \cdot \overline{I}_T^*] = \Re e[\overline{U}_{RS} \cdot \overline{I}_R^*] + \Re e[\overline{U}_{TS} \cdot \overline{I}_T^*] \\
&= W_1 + W_2
\end{aligned}
$$

Además, según el Teorema de Boucherot:

$$
P_{12} = P_1 + P_2
$$

Hay que recordar que, cuando el sistema está desequilibrado, no se puede utilizar el método de los dos vatímetros para obtener la potencia reactiva. La potencia activa que absorbe la carga trifásica 2 se calcula a partir de las relaciones anteriores:

$$
P_2 = W_1 + W_2 - P_1 = 865 + 635 - 232 = 1\,268\,\mathrm{W}
$$

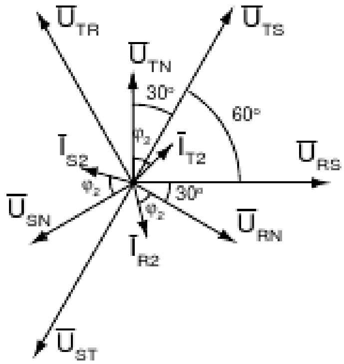


Figura 23

Según la Figura 22 y el diagrama fasorial de la Figura 23, la lectura del vatímetro 4 es la siguiente:

$$\begin{aligned} W_4 &= U_{TS} \cdot I_{R2} \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TS}, \overline{I}_{R2}}) = U_{TS} \cdot I_{R2} \cdot \cos(90^\circ + \varphi_2) \\ &= -U_{TS} \cdot I_{R2} \cdot \sin(\varphi_2) = \frac{-Q_2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Así pues, la potencia reactiva de la carga 2 es:

$$Q_2 = -\sqrt{3} \cdot W_4 = -\sqrt{3} \cdot 167 \approx -289{,}25\,\text{var}$$

Como el signo de Q_2 ha resultado negativo implica que la carga 2 tiene carácter capacitivo, es decir cede potencia reactiva.

3. El factor de potencia equivalente de la instalación es:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_T &= \frac{P_{12}}{S_{12}} = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2}} \\ &= \frac{232 + 1\,268}{\sqrt{(232 + 1\,268)^2 + (7\,997 - 289{,}25)^2}} \approx 0{,}19\,\text{inductivo} \end{aligned}$$

4. Una vez conectado el banco de condensadores, el factor de potencia equivalente de la instalación ha de ser de $0{,}95$ capacitivo, por tanto el nuevo ángulo equivalente será:

$$\varphi_N = -\arccos(0{,}95) \approx -18{,}19^\circ$$

De manera que la potencia reactiva que cede el conjunto de las cargas y el banco de condensadores es:

$$Q_N = P_{12} \cdot \tan\varphi_N = (232 + 1\,268) \cdot \tan(-18{,}19^\circ) \approx -492{,}88\,\text{var}$$

En consecuencia la potencia reactiva que debe suministrar el banco trifásico de condensadores se calcula como sigue:

$$Q_C = Q_N - Q_{12} = -492{,}88 - (7\,997 - 289{,}25) = -8\,200{,}63\,\text{var}$$

De esta forma, la capacidad de cada uno de los condensadores del banco es la siguiente:

$$C = \frac{8\,200{,}63}{3 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot \left(\dfrac{400}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 163\,\mu\text{F}$$

PROBLEMA 11

Del sistema trifásico, equilibrado y de secuencia directa, de la Figura 24 se sabe que, con los interruptores abiertos, el vatímetro 1 marca cero, el vatímetro 2 marca $1\,000$ W y el voltímetro marca 400 V. Sabiendo que C=10 μF, calcular la lectura de ambos vatímetros cuando los interruptores están cerrados.

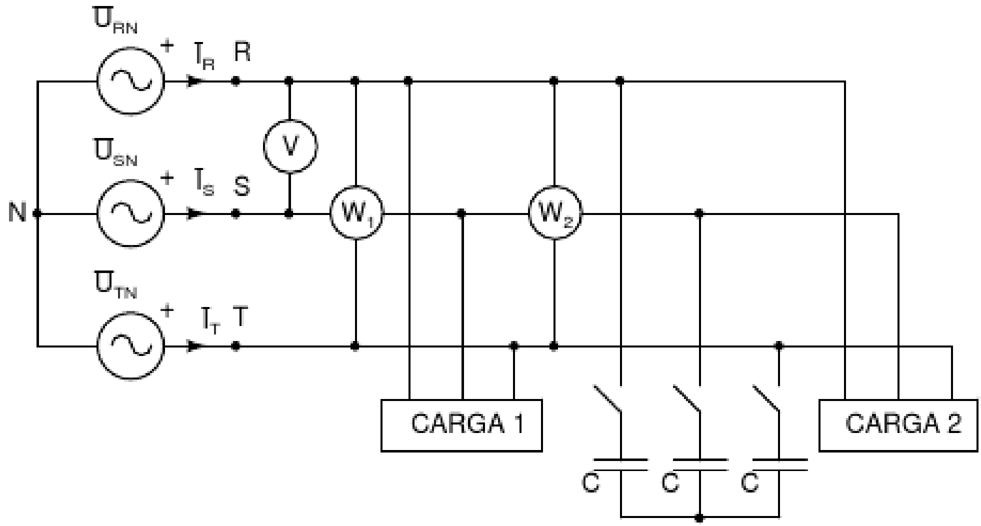


Figura 24

Solución 11

Según la Figura 24 y 25, la lectura del vatímetro 1 es la siguiente:

$$W_1 = U_{RT} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RT}, \overline{I}_S}) = U_{RT} \cdot I_S \cdot \cos(90^\circ + \varphi) = -U_{RT} \cdot I_S \cdot \sin\varphi = \frac{-Q_T}{\sqrt{3}}$$

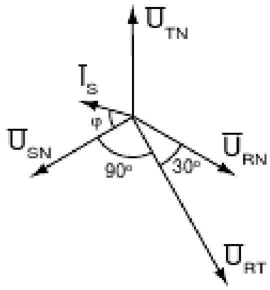


Figura 25

Con los interruptores abiertos:

$$W_1 = \frac{-(Q_1 + Q_2)}{\sqrt{3}}$$

Análogamente, con los interruptores abiertos la lectura del vatímetro 2 es:

$$W_2 = \frac{-Q_2}{\sqrt{3}}$$

Teniendo en cuenta que, con los interruptores abiertos, W_1=0 y W_2=1 000, entonces:

$$0 = \frac{-(Q_1 + Q_2)}{\sqrt{3}} \implies Q_1 = -Q_2$$

$$1\,000 = \frac{-Q_2}{\sqrt{3}} \implies Q_2 = -1\,000 \cdot \sqrt{3}\,\text{var} \implies Q_1 = 1\,000 \cdot \sqrt{3}\,\text{var}$$

Según los resultados obtenidos, la carga 2 es capacitiva y la carga 1 es inductiva.

Por otro lado, la potencia reactiva que cede el banco de condensadores conectado en estrella es:

$$Q_C = 3 \cdot U_F^2 \cdot \omega C = 3 \cdot \left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 2\pi 50 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \approx 502{,}65\,\text{var}$$

Con los interruptores cerrados, la lectura de ambos vatímetros es la siguiente:

$$W_1 = \frac{-(Q_1 + Q_2 + Q_C)}{\sqrt{3}} = \frac{-(1\,000 \cdot \sqrt{3} - 1\,000 \cdot \sqrt{3} - 502{,}65)}{\sqrt{3}} \approx 290{,}21\,\mathrm{W}$$

$$W_2 = \frac{-(Q_2 + Q_C)}{\sqrt{3}} = \frac{-(-1\,000 \cdot \sqrt{3} - 502{,}65)}{\sqrt{3}} \approx 1\,290{,}2\,\mathrm{W}$$

PROBLEMA 12

El circuito trifásico de la Figura 26 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa de $380\,\mathrm{V}$. Sabiendo que $\overline{Z}_1$=$10\angle 90°\ \Omega$, $\overline{Z}_2$=$10\angle 0°\ \Omega$, $\overline{Z}_3$=$10\angle -36{,}87°\ \Omega$, R=$0{,}1\,\Omega$, obtener las lecturas de los tres amperímetros en los siguientes casos:

1. Con K_1 y K_2 cerrados.
2. Con K_1 cerrado y K_2 abierto.
3. Con K_1 y K_2 abiertos.
4. Con K_1 y K_2 cerrados y conectada la batería de condensadores de forma que el factor de potencia equivalente de la instalación es de $0{,}99$ inductivo.

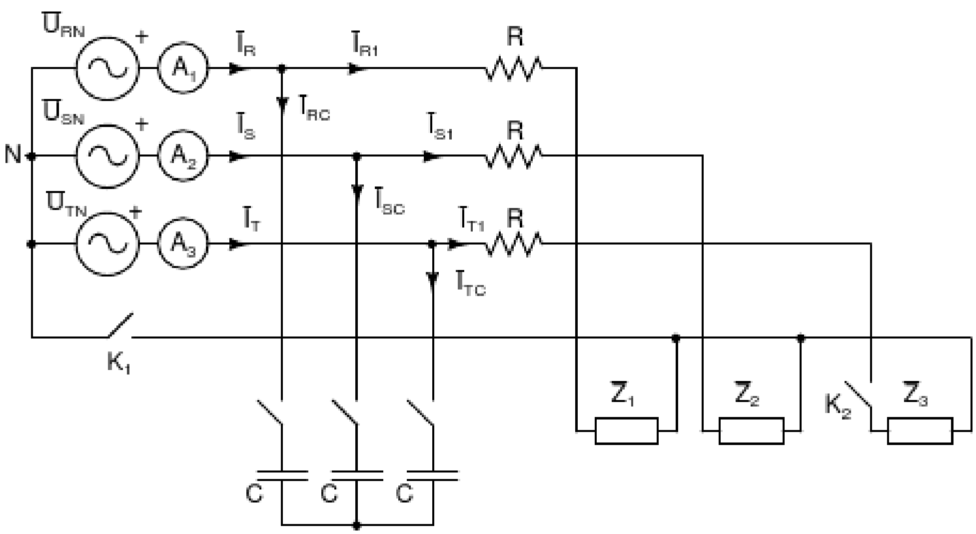


Figura 26

Solución 12

1. Si K_1 y K_2 están cerrados entonces:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{R1} = \frac{\overline{U}_{RN}}{R+\overline{Z}_1} = \frac{380/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{0{,}1+10\angle 90^\circ} \approx 21{,}94\angle -89{,}43^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_S = \overline{I}_{S1} = \frac{\overline{U}_{SN}}{R+\overline{Z}_2} = \frac{380/\sqrt{3}\angle -120^\circ}{0{,}1+10\angle 0^\circ} \approx 21{,}72\angle -120^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_T = \overline{I}_{T1} = \frac{\overline{U}_{TN}}{R+\overline{Z}_3} = \frac{380/\sqrt{3}\angle 120^\circ}{0{,}1+10\angle -36{,}87^\circ} \approx 21{,}76\angle 156{,}53^\circ \text{ A}$$

Siendo la lectura de cada amperímetro:

$$A_1 = 21{,}94\,\text{A} \;\; ; \;\; A_2 = 21{,}72\,\text{A} \;\; ; \;\; A_3 = 21{,}76\,\text{A}$$

2. Cuando K_1 está cerrado y K_2 abierto la lectura de los amperímetros 1 y 2 no varían respecto al apartado anterior, sin embargo la lectura del amperímetro 3 ahora es nula:

$$A_1 = 21{,}94\,\text{A} \;\; ; \;\; A_2 = 21{,}72\,\text{A} \;\; ; \;\; A_3 = 0$$

3. Cuando ambos interruptores se encuentran abiertos, el circuito resultante es el mostrado en la Figura 27, de donde se deduce la siguiente expresión:

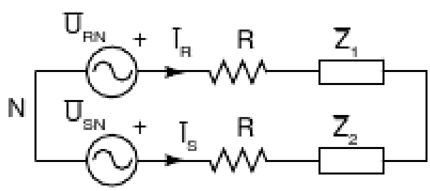


Figura 27

$$\overline{U}_{RS} = \overline{I}_R \cdot (2\cdot R + \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2) = -\overline{I}_S \cdot (2\cdot R + \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2)$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$\overline{I}_R = -\overline{I}_S = \frac{\overline{U}_{RS}}{2\cdot R + \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}$$
$$= \frac{380\angle 30^\circ}{2\cdot 0{,}1 + 10\angle 90^\circ + 10\angle 0^\circ} \approx 26{,}6\angle -14{,}43^\circ \text{ A}$$

Por tanto, la lectura de los amperímetros es:

$$A_1 = A_2 = 26{,}6\,\text{A} \;\; ; \;\; A_3 = 0$$

4. En primer lugar se calculará la potencia de la batería de condensadores. Para ello se obtendrán las potencias, activa y reactiva, absorbidas por los receptores:

$$\begin{aligned}
P_T &= R \cdot (I_{R1}^2 + I_{S1}^2 + I_{T1}^2) \\
&\quad + Z_1 \cdot \cos\varphi_1 \cdot I_{R1}^2 + Z_2 \cdot \cos\varphi_2 \cdot I_{S1}^2 + Z_3 \cdot \cos\varphi_3 \cdot I_{T1}^2 \\
&= 0{,}1 \cdot (21{,}94^2 + 21{,}72^2 + 21{,}76^2) + 10 \cdot \cos 90^\circ \cdot 21{,}94^2 \\
&\quad + 10 \cdot \cos 0^\circ \cdot 21{,}72^2 + 10 \cdot \cos(-36{,}87^\circ) \cdot 21{,}76^2 \approx 8\,648{,}22\,\mathrm{W} \\
Q_T &= Z_1 \cdot \sin\varphi_1 \cdot I_{R1}^2 + Z_2 \cdot \sin\varphi_2 \cdot I_{S1}^2 + Z_3 \cdot \sin\varphi_3 \cdot I_{T1}^2 \\
&= 10 \cdot \sin 90^\circ \cdot 21{,}94^2 + 10 \cdot \sin 0^\circ \cdot 21{,}72^2 \\
&\quad + 10 \cdot \sin(-36{,}87^\circ) \cdot 21{,}76^2 \approx 1\,972{,}64\,\mathrm{var}
\end{aligned}$$

Por tanto, la potencia reactiva que ha de suministrar la batería de condensadores para obtener un factor de potencia de $0{,}99$ es la siguiente:

$$\tan(\arccos 0{,}99) = \frac{Q_T - Q_C}{P_T} = \frac{1\,972{,}64 - Q_C}{8\,648{,}22} \implies Q_C \approx 740{,}33\,\mathrm{var}$$

Una vez obtenida la potencia reactiva de la batería de condensadores entonces:

$$I_{RC} = I_{SC} = I_{TC} = \frac{Q_C}{\sqrt{3} \cdot U_L} = \frac{740{,}33}{\sqrt{3} \cdot 380} \approx 1{,}12\,\mathrm{A}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
\overline{I}'_R &= \overline{I}_{R1} + \overline{I}_{RC} = 21{,}94\angle -89{,}43^\circ + 1{,}12\angle 90^\circ \approx 20{,}82\angle -89{,}4^\circ\,\mathrm{A} \\
\overline{I}'_S &= \overline{I}_{S1} + \overline{I}_{SC} = 21{,}72\angle -120^\circ + 1{,}12\angle -30^\circ \approx 21{,}75\angle -117{,}04^\circ\,\mathrm{A} \\
\overline{I}'_T &= \overline{I}_{T1} + \overline{I}_{TC} = 21{,}76\angle 156{,}53^\circ + 1{,}12\angle -150^\circ \approx 22{,}44\angle 158{,}83^\circ\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Siendo la lectura de cada amperímetro:

$$A_1 = 20{,}82\,\mathrm{A} \;\; ; \;\; A_2 = 21{,}75\,\mathrm{A} \;\; ; \;\; A_3 = 22{,}44\,\mathrm{A}$$

PROBLEMA 13

El circuito de la Figura 28 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa. Se sabe que el voltímetro mide 400 V, R=10 Ω, $\overline{Z}_1$=10$\angle$90° Ω, y $\overline{Z}_2$=30$\angle-90°$ Ω. Obtener:

1. La lectura del amperímetro.

2. La lectura del vatímetro 1.

3. La lectura del vatímetro 2.

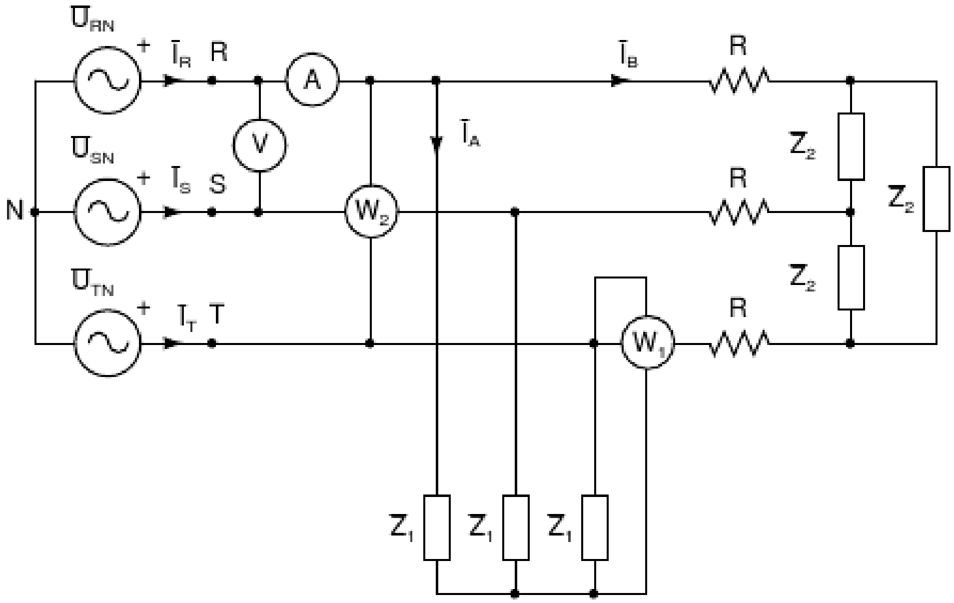


Figura 28

SOLUCIÓN 13

1. Como el sistema está equilibrado, el neutro de la carga 1 y el neutro del generador están al mismo potencial. Tomando como origen de fases la tensión $\overline{U}_{RS}$:

$$\overline{I}_A = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_1} = \frac{400/\sqrt{3}\angle-30°}{10\angle 90°} = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle-120° \text{ A}$$

Por otro lado, si se convierte la carga 2, conectada en triángulo, a su equivalente en estrella, resulta:

$$\overline{I}_B = \frac{\overline{U}_{RN}}{R + \frac{\overline{Z}_2}{3}} = \frac{400/\sqrt{3}\angle -30^\circ}{10 + \frac{30\angle -90^\circ}{3}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\angle 15^\circ \text{ A}$$

Según la Figura 28:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_A + \overline{I}_B = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle -120^\circ + \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\angle 15^\circ \approx 16{,}32\angle -75^\circ \text{ A}$$

Por tanto, la lectura del amperímetro es de 16,32 A.

2. Según la Figura 28, el vatímetro 1 está midiendo la potencia activa de una de las fases del conjunto trifásico situado a la derecha de él. Como $\overline{Z}_2$ es una carga capacitiva pura, no consumirá potencia activa. Por tanto:

$$W_1 = I_B^2 \cdot R = \left(\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 10 = \frac{8\,000}{3} \text{ W}$$

3. Según la Figura 28 y el diagrama fasorial de la Figura 29, el vatímetro 2 mide lo siguiente:

$$W_2 = U_{RT} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RT}, \overline{I}_S}) = U_{RT} \cdot I_S \cdot \cos(\varphi + 90^\circ) = \frac{-Q}{\sqrt{3}}$$

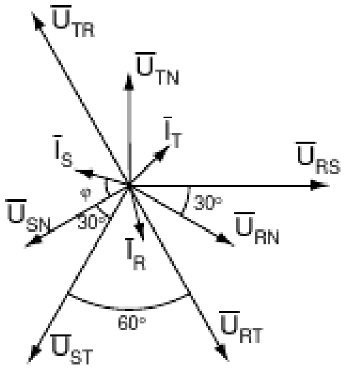


Figura 29

donde Q es la potencia reactiva cedida por el generador:

$$\begin{aligned} Q &= 3 \cdot I_A^2 \cdot Z_1 \cdot \sin \varphi_1 + 3 \cdot I_B^2 \cdot \frac{Z_2}{3} \cdot \sin \varphi_2 \\ &= 3 \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 10 \cdot \sin(90^\circ) + 3 \cdot \left(\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{30}{3} \cdot \sin(-90^\circ) \\ &= 8\,000 \,\text{var} \end{aligned}$$

De donde resulta:

$$W_2 = \frac{-8\,000}{\sqrt{3}} \approx -4\,618{,}8 \,\text{W}$$

Otra forma de proceder es aplicando directamente la expresión del vatímetro 2:

$$\begin{aligned} W_2 &= U_{RT} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RT}, \overline{I}_S}) \\ &= 400 \cdot \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos[-60^\circ - (-75^\circ - 120^\circ)] \\ &= 400 \cdot \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos(135^\circ) = \frac{-8\,000}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

PROBLEMA 14

El circuito de la Figura 30 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa. Se sabe que el voltímetro mide 400 V, R=10 Ω, $\overline{Z}_1$=$\overline{Z}_3 = 10\angle 90^\circ$ Ω y $\overline{Z}_2$=$30\angle -90^\circ$ Ω. Obtener:

1. La lectura del amperímetro 1.
2. La lectura del amperímetro 2.
3. La lectura del vatímetro 1.
4. La lectura del vatímetro 2.

Solución 14

El circuito trifásico de la Figura 30 se encuentra equilibrado ya que tanto las cargas como el sistema de alimentación lo están. De este modo resulta mas cómodo trabajar con un circuito monofásico equivalente para el análisis del sistema.

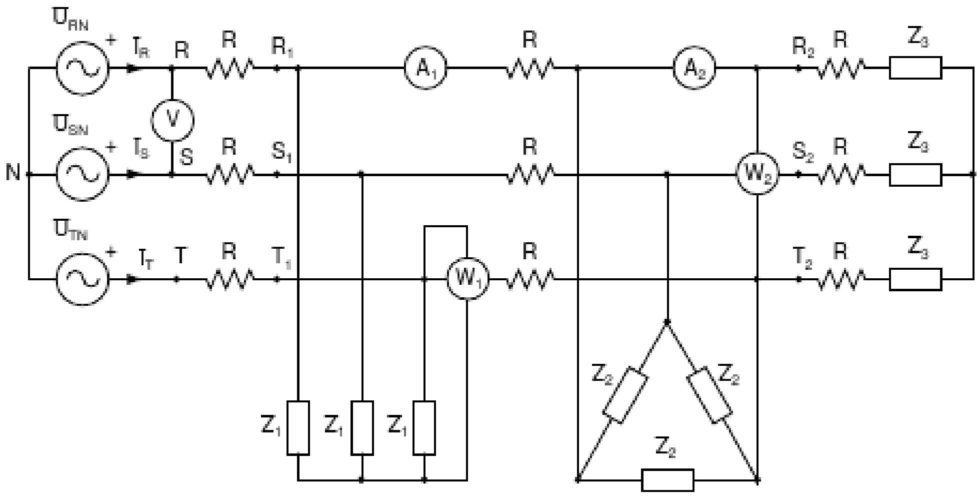


Figura 30

Para obtener el circuito monofásico equivalente es necesario que todas las cargas estén conectadas en triángulo o en estrella. En este caso se usará la conexión en estrella, de forma que la carga 2 habrá que convertirla a esta configuración:

$$\overline{Z}_{2Y} = \frac{\overline{Z}_{2\Delta}}{3} = \frac{\overline{Z}_2}{3}$$

En la Figura 31 se representa el circuito monofásico equivalente correspondiente a la Figura 30.

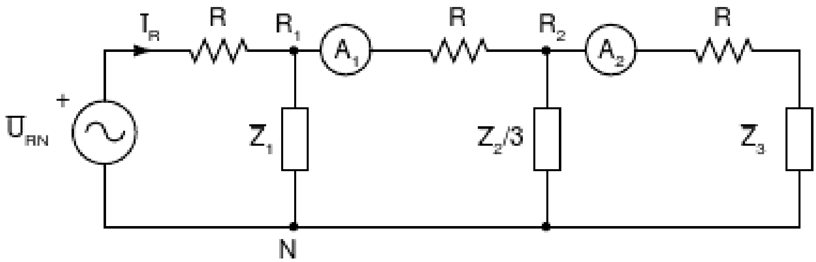


Figura 31

A partir de la lectura del voltímetro, y tomando la fuente de tensión $\overline{U}_{RN}$ como origen de fases, se tiene:

$$\overline{U}_{RN} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ \text{ V}$$

1. Haciendo una conversión de la fuente de tensión en el circuito de la Figura 31, resulta el circuito de la Figura 32.

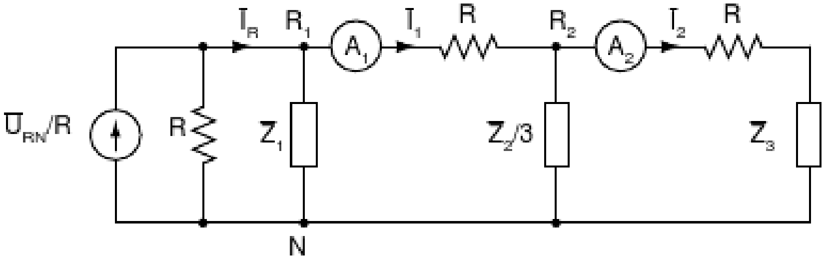


Figura 32

A partir del circuito de la Figura 32, aplicando el concepto de divisor de intensidad:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{RN}}{R} \cdot \frac{\overline{Y}_{eq}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\overline{Z}_1} + \overline{Y}_{eq}}$$

donde:

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{1}{\overline{Y}_{eq}} = R + \frac{(R + \overline{Z}_3) \cdot \dfrac{\overline{Z}_2}{3}}{(R + \overline{Z}_3) + \dfrac{\overline{Z}_2}{3}}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{1}{\overline{Y}_{eq}} = 10 + \frac{(10 + 10\angle 90^\circ) \cdot \dfrac{30\angle - 90^\circ}{3}}{(10 + 10\angle 90^\circ) + \dfrac{30\angle - 90^\circ}{3}} \approx 22{,}36\angle - 26{,}57^\circ \ \Omega$$

$$\overline{I}_1 = \frac{400\angle 0^\circ}{\sqrt{3} \cdot 10} \cdot \frac{\dfrac{1}{22{,}36\angle - 26{,}57^\circ}}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10\angle 90^\circ} + \dfrac{1}{22{,}36\angle - 26{,}57^\circ}} \approx 6{,}41\angle 56{,}31^\circ \text{ A}$$

Por tanto, la lectura del amperímetro 1 es de 6,41 A.

2. Procediendo de forma análoga al caso anterior:

$$\overline{I}_2 = \overline{I}_1 \cdot \frac{\dfrac{1}{(R + \overline{Z}_3)}}{\dfrac{1}{(R + \overline{Z}_3)} + \dfrac{3}{\overline{Z}_2}}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$\overline{I}_2 = 6{,}41\angle 56{,}31^\circ \cdot \frac{\dfrac{1}{(10+10\angle 90^\circ)}}{\dfrac{1}{(10+10\angle 90^\circ)} + \dfrac{3}{30\angle -90^\circ}} = 6{,}41\angle -33{,}69^\circ \text{ A}$$

Por tanto, la lectura del amperímetro 2 es de $6{,}41$ A.

3. Según la Figura 30, el vatímetro 1 está midiendo el consumo de potencia activa de una de las fases del conjunto trifásico situado a la derecha de él:

$$W_1 = I_1^2 \cdot Z_{eq} \cdot \cos\varphi_{eq} = 6{,}41^2 \cdot 22{,}36 \cdot \cos(-26{,}57^\circ) \approx 821{,}7\,\text{W}$$

4. Atendiendo a la Figura 30, es fácil comprobar que el vatímetro 2 mide lo siguiente:

$$W_2 = \frac{-Q}{\sqrt{3}} = \frac{-3 \cdot I_2^2 \cdot Z_3 \cdot \sin\varphi_3}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$W_2 = \frac{-3 \cdot 6{,}41^2 \cdot 10 \cdot \sin(90^\circ)}{\sqrt{3}} \approx -711{,}66\,\text{W}$$

PROBLEMA 15

El circuito de la Figura 33 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa. Se sabe que el voltímetro mide 400 V, $\overline{Z}_R$=10$\angle 0^\circ$ Ω, $\overline{Z}_S$=10$\angle 45^\circ$ Ω y $\overline{Z}_T$=10$\angle 90^\circ$ Ω. Tomando como origen de fases $\overline{U}_{RN}$, se pide:

1. Obtener $\overline{I}_R$, $\overline{I}_S$ e $\overline{I}_T$ y las lecturas de W_1 y W_2 cuando K_1 y K_2 están abiertos.

2. Obtener la capacidad (C) de los condensadores para que, con K_1 cerrado y K_2 abierto, el factor de potencia equivalente de la instalación sea la unidad. Así mismo, obtener $\overline{I}_R$, $\overline{I}_S$ e $\overline{I}_T$.

3. Obtener las capacidades (C_R, C_S y C_T) de los condensadores para que, con K_1 abierto y K_2 cerrado, el factor de potencia de cada una de las ramas monofásicas resultantes sea la unidad.

4. En las condiciones del apartado anterior, obtener $\overline{I}_R, \overline{I}_S$ e $\overline{I}_T$.

5. Calcular $(I_R^2 + I_S^2 + I_T^2)$ para los tres casos analizados. Justificar cual de los métodos de compensación de reactiva es el más conveniente.

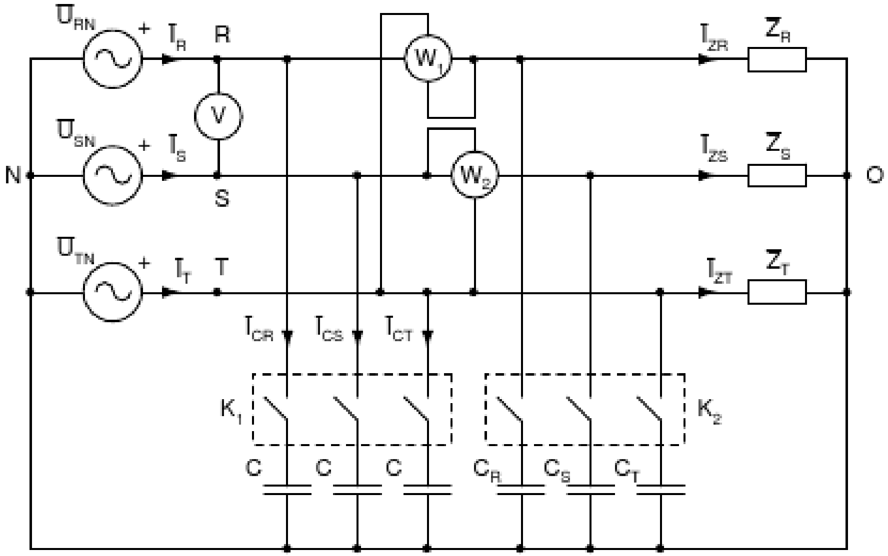


Figura 33

SOLUCIÓN 15

1. Como el neutro del generador está rígidamente unido al neutro de la carga entonces U_{NO}=0, y las intensidades resultan:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{ZR} = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_R} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{10\angle 0^\circ} \approx \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 0\,\mathrm{A}$$

$$\overline{I}_S = \overline{I}_{ZS} = \frac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_S} = \frac{400/\sqrt{3}\angle -120^\circ}{10\angle 45^\circ} \approx \frac{40}{\sqrt{3}}\angle -165^\circ\,\mathrm{A}$$

$$\overline{I}_T = \overline{I}_{ZT} = \frac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_T} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 120^\circ}{10\angle 90^\circ} \approx \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ\,\mathrm{A}$$

La lectura de cada vatímetro es:

$$W_1 = U_{TR} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TR}, \overline{I}_R}) = 400 \cdot \frac{40}{\sqrt{3}} \cdot \cos(150^\circ) = -8\,000\,\mathrm{W}$$

$$W_2 = U_{ST} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{ST}, \overline{I}_S}) = 400 \cdot \frac{40}{\sqrt{3}} \cdot \cos(-90^\circ + 165^\circ) \approx 2\,391\,\mathrm{W}$$

2. La potencia reactiva que absorbe la carga es:

$$\begin{aligned} Q &= Z_S \cdot \sin\varphi_S \cdot I_{ZS}^2 + Z_T \cdot \sin\varphi_T \cdot I_{ZT}^2 \\ &= 10 \cdot \sin(45^\circ) \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right)^2 + 10 \cdot \sin(90^\circ) \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right)^2 \approx 9\,104{,}57 \text{ var} \end{aligned}$$

Como el factor equivalente debe ser la unidad entonces toda la potencia reactiva que absorbe la carga debe ser suministrada por la batería de condensadores:

$$Q_C = Q = 3 \cdot \frac{U_F^2}{X_C} = \omega \cdot C \cdot U_L^2$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$C = \frac{Q_C}{2\pi \cdot f \cdot U_L^2} = \frac{9\,104{,}57}{2\pi \cdot 50 \cdot 400^2} \approx 181{,}13\,\mu\text{F}$$

Según la Figura 33:

$$\begin{aligned} \overline{I}_{CR} &= \frac{\overline{U}_{RN}}{X_C\angle-90^\circ} = \frac{\overline{U}_{RN} \cdot 2\pi \cdot f \cdot C}{1\angle-90^\circ} \\ &= \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 181{,}13 \cdot 10^{-6}}{1\angle-90^\circ} \approx 13{,}14\angle 90^\circ \text{ A} \\ \overline{I}_{CS} &\approx 13{,}14\angle-30^\circ \text{ A} \quad ; \quad \overline{I}_{CT} \approx 13{,}14\angle 210^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\overline{I}'_R = \overline{I}_{CR} + \overline{I}_{ZR} = 13{,}14\angle 90^\circ + \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 0 \approx 26{,}57\angle 29{,}63^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}'_S = \overline{I}_{CS} + \overline{I}_{ZS} = 13{,}14\angle-30^\circ + \frac{40}{\sqrt{3}}\angle-165^\circ \approx 16{,}64\angle-131{,}05^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}'_T = \overline{I}_{CT} + \overline{I}_{ZT} = 13{,}14\angle 210^\circ + \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ \approx 9{,}95\angle 30^\circ \text{ A}$$

3. En este caso la capacidad de cada uno de los condensadores será tal que el factor de potencia de cada una de las ramas monofásicas sea la unidad. La potencia reactiva que absorbe cada una de las impedancias monofásicas es:

$$Q_R = Z_R \cdot \sin\varphi_R \cdot I_{ZR}^2 = 0$$

$$Q_S = Z_S \cdot \sin\varphi_S \cdot I_{ZS}^2 = 10 \cdot \sin(45^\circ) \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right)^2 \approx 3\,771{,}24 \text{ var}$$

$$Q_T = Z_T \cdot \sin\varphi_T \cdot I_{ZT}^2 = 10 \cdot \sin(90^\circ) \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right)^2 \approx 5\,333{,}33 \text{ var}$$

A partir de estas potencias, la capacidad de cada uno de los condensadores se calcula de la siguiente forma:

$$C_R = \frac{Q_R}{2\pi \cdot f \cdot U_F^2} = 0$$

$$C_S = \frac{Q_S}{2\pi \cdot f \cdot U_F^2} = \frac{3\,771{,}24}{2\pi \cdot 50 \cdot (400/\sqrt{3})^2} \approx 225\,\mu\text{F}$$

$$C_T = \frac{Q_T}{2\pi \cdot f \cdot U_F^2} = \frac{5\,333{,}33}{2\pi \cdot 50 \cdot (400/\sqrt{3})^2} \approx 318\,\mu\text{F}$$

4. Teniendo en cuenta que, una vez compensadas, el factor de potencia de cada rama monofásica es la unidad, entonces:

$$\overline{I}''_R = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}''_S = \frac{P_S}{U_F}\angle -120^\circ = \frac{Z_R \cdot \cos\varphi_R \cdot I_{ZS}^2}{U_F}\angle -120^\circ$$

$$= \frac{10 \cdot \cos(45^\circ) \cdot (40/\sqrt{3})^2}{(400/\sqrt{3})}\angle -120^\circ \approx 16{,}33\angle -120^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}''_T = \frac{P_T}{U_F}\angle 120^\circ = \frac{Z_T \cdot \cos\varphi_T \cdot I_{ZT}^2}{U_F}\angle 120^\circ$$

$$= \frac{10 \cdot \cos(90^\circ) \cdot (40/\sqrt{3})^2}{(400/\sqrt{3})}\angle 120^\circ = 0\,\text{A}$$

5. Para cada uno de los casos analizados se obtiene lo siguiente:

$$(I_R^2 + I_S^2 + I_T^2) = 3 \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1\,600\,\text{A}^2$$

$$(I_R'^2 + I_S'^2 + I_T'^2) = 26{,}57^2 + 16{,}64^2 + 9{,}95^2 \approx 1\,081{,}1\,\text{A}^2$$

$$(I_R''^2 + I_S''^2 + I_T''^2) = (40/\sqrt{3})^2 + 16{,}33^2 \approx 800\,\text{A}^2$$

A la vista de los resultados, el método de compensación de reactiva más conveniente en este caso se consigue usando condensadores de distinta capacidad. Con este método se disminuirían las pérdidas en las líneas de alimentación ya que:

$$\text{Pérdidas} \sim (I_R^2 + I_S^2 + I_T^2)$$

PROBLEMA 16

El circuito de la Figura 34 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones, equilibrado y de secuencia inversa, de 400 V. Sabiendo que $\overline{Z}_R$=$10\angle 0^\circ\ \Omega$, $\overline{Z}_S$=$10\angle 45^\circ\ \Omega$, $\overline{Z}_T$=$10\angle 90^\circ\ \Omega$ y que $\overline{Z}_N$=$0{,}1\angle 0^\circ\ \Omega$, obtener la lectura del voltímetro en los casos siguientes:

1. Con K_1 abierto y K_2 cerrado.

2. Con K_1 cerrado.

3. Con K_1 y K_2 abiertos.

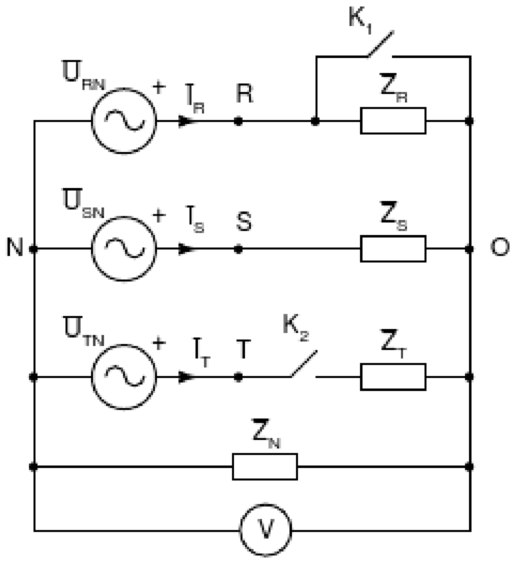


Figura 34

Solución 16

1. Con K_1 abierto y K_2 cerrado, la tensión entre el neutro del generador y el neutro de la carga se puede obtener aplicando el teorema de Millman:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_R} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_S} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_T}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_R} + \dfrac{1}{\overline{Z}_S} + \dfrac{1}{\overline{Z}_T} + \dfrac{1}{\overline{Z}_N}}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$\overline{U}_{ON}=\frac{\dfrac{(400/\sqrt{3})\angle 0^\circ}{10\angle 0^\circ}+\dfrac{(400/\sqrt{3})\angle 120^\circ}{10\angle 45^\circ}+\dfrac{(400/\sqrt{3})\angle -120^\circ}{10\angle 90^\circ}}{\dfrac{1}{10\angle 0^\circ}+\dfrac{1}{10\angle 45^\circ}+\dfrac{1}{10\angle 90^\circ}+\dfrac{1}{0{,}1\angle 0^\circ}}\approx 3{,}45\angle 76^\circ\text{ V}$$

Por tanto, la lectura del voltímetro es de $3{,}45$ V.

2. Si K_1 está cerrado, la lectura del voltímetro es de 400/$\sqrt{3}\approx 230$ V independientemente del estado del interruptor K_2, porque se encuentra midiendo la tensión de la fuente U_{RN}

3. Con K_1 y K_2 abiertos, la tensión entre el neutro del generador y el neutro de la carga se puede obtener de la misma forma que en el apartado 1, aplicando el teorema de Millman:

$$\overline{U}_{ON}=\frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_R}+\dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_S}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_R}+\dfrac{1}{\overline{Z}_S}+\dfrac{1}{\overline{Z}_N}}$$

Sustituyendo valores, resulta:

$$\overline{U}_{ON}=\frac{\dfrac{(400/\sqrt{3})\angle 0^\circ}{10\angle 0^\circ}+\dfrac{(400/\sqrt{3})\angle 120^\circ}{10\angle 45^\circ}}{\dfrac{1}{10\angle 0^\circ}+\dfrac{1}{10\angle 45^\circ}+\dfrac{1}{0{,}1\angle 0^\circ}}\approx 3{,}60\angle 37{,}9^\circ\text{ V}$$

Por tanto, la lectura del voltímetro es de $3{,}6$ V.

PROBLEMA 17

El circuito de la Figura 35 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones, equilibrado y de secuencia directa. Sabiendo que $\overline{Z}_C=-j40\,\Omega$, $\overline{Z}_L=j40\,\Omega$ y que el amperímetro marca 10 A, se pide:

1. Calcular la intensidad que circula por el neutro.
2. Obtener las lecturas de los vatímetros.
3. Justificar si debería coincidir la suma de las lecturas de los dos vatímetros con la potencia activa absorbida por la carga.

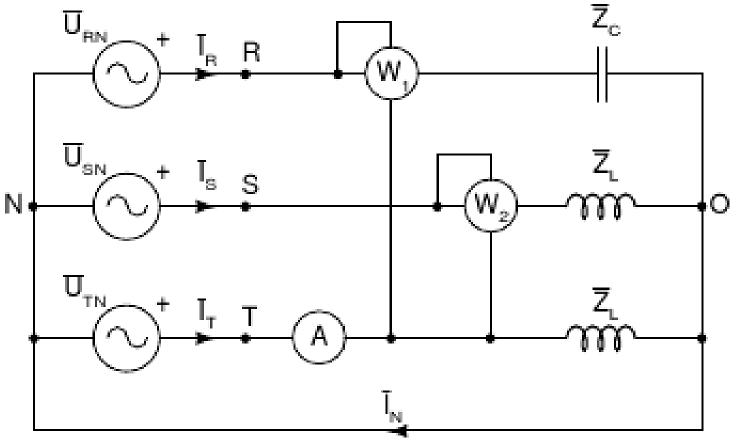


Figura 35

SOLUCIÓN 17

1. Para determinar la intensidad que circula por el neutro basta con aplicar la Ley de Kirchhoff de intensidades:

$$\overline{I}_N = \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T$$

Como el sistema posee neutro, y éste se considera ideal, las tensiones de fase en la carga estarán equilibradas. Al tener el mismo módulo las tres impedancias de carga, las correspondientes intensidades de fase tendrán el mismo valor eficaz de 10 A:

$$|\overline{I}_R| = |\overline{I}_S| = |\overline{I}_T| = 10\,\mathrm{A}$$

Eligiendo como origen de fases la tensión $\overline{U}_{RN}$, se construye el diagrama fasorial de la Figura 36 donde las tres intensidades se situarán adelantadas o retrasadas 90° a su correspondiente tensión de fase, según la carga sea, respectivamente, un condensador o una bobina. Según esto, es fácil comprobar que

$$\overline{I}_R = 10\angle 90^\circ\ \mathrm{A}\ \ ;\ \ \overline{I}_S = 10\angle 150^\circ\ \mathrm{A}\ \ ;\ \ \overline{I}_T = 10\angle 30^\circ\ \mathrm{A}$$

y por tanto, la intensidad que circula por el neutro es

$$\overline{I}_N = 10\angle 90^\circ + 10\angle 150^\circ + 10\angle 30^\circ = 20\angle 90^\circ\ \mathrm{A}$$

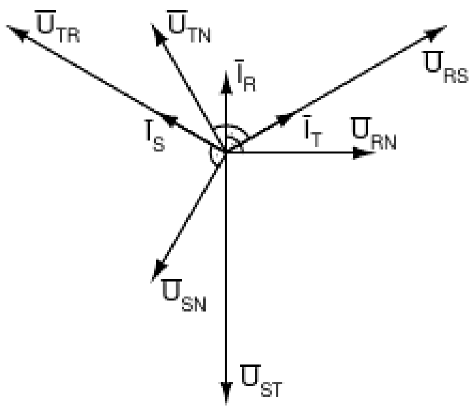


Figura 36

2. Las tensiones de fase y de línea se pueden obtener de las siguientes relaciones:

$$U_F = I_F \cdot Z = 10 \cdot 40 = 400\,\mathrm{V}$$
$$U_L = \sqrt{3} \cdot U_F = \sqrt{3} \cdot 400\,\mathrm{V}$$

De esta forma, la lectura de cada vatímetro será

$$\begin{aligned} W_1 &= U_{RT} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RT}, \overline{I}_R}) \\ &= \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 10 \cdot \cos(-30^\circ - 90^\circ) = -2\,000\sqrt{3}\,\mathrm{W} \\ W_2 &= U_{ST} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{ST}, \overline{I}_S}) \\ &= \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 10 \cdot \cos(-90^\circ - 150^\circ) = -2\,000\sqrt{3}\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

3. Al tratarse de elementos reactivos puros, la potencia activa absorbida por ellos será nula y no coincide con la suma de las lecturas de los vatímetros. Esto es debido a que el método de Aron, al igual que el de los tres vatímetros, solo es válido en sistemas donde $\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0$, lo que no se cumple en este caso.

PROBLEMA 18

El circuito de la Figura 37 se encuentra alimentado por un generador desequilibrado. Conocidas las intensidades de línea $\overline{I}_R$=15∠30° A e $\overline{I}_S$=20∠140° A, y que $\overline{Z}$=3∠30° Ω, determinar las intensidades de fase en la carga.

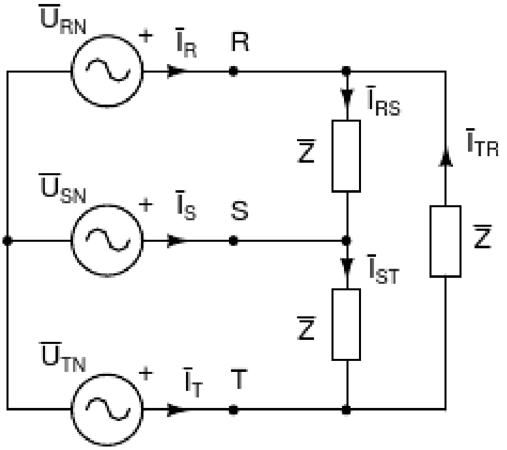


Figura 37

Solución 18

Al estar el generador desequilibrado, no existe una relación conocida entre las intensidades de línea y de fase. Por tanto, será necesario calcular las tensiones del sistema.

Convirtiendo la carga en triángulo a su estrella equivalente da lugar al circuito de la Figura 38, a partir del cual se puede obtener la tensión de cada impedancia:

$$\begin{aligned}
\overline{U}_{RN} &= \overline{I}_R \cdot \overline{Z}' = 15\angle 30^\circ \cdot 1\angle 30^\circ = 15\angle 60^\circ \text{ V} \\
\overline{U}_{SN} &= \overline{I}_S \cdot \overline{Z}' = 20\angle 140^\circ \cdot 1\angle 30^\circ = 20\angle 170^\circ \text{ V} \\
\overline{U}_{TN} &= \overline{I}_T \cdot \overline{Z}' = -(\overline{I}_R + \overline{I}_S) \cdot \overline{Z}' \\
&\approx 20{,}49\angle -83{,}46 \cdot 1\angle 30^\circ = 20{,}49\angle -23{,}46 \text{ V}
\end{aligned}$$

A partir de estas tensiones de fase se obtienen las tensiones de línea:

$$\begin{aligned}
\overline{U}_{RS} &= \overline{U}_{RN} - \overline{U}_{SN} = 15\angle 60^\circ - 20\angle 170^\circ \approx 28{,}81\angle 19{,}29^\circ \text{ V} \\
\overline{U}_{ST} &= \overline{U}_{SN} - \overline{U}_{TN} = 20\angle 170^\circ - 20{,}49\angle -23{,}46^\circ \approx 40{,}21\angle 163{,}19^\circ \text{ V} \\
\overline{U}_{TR} &= \overline{U}_{TN} - \overline{U}_{RN} = 20{,}49\angle -23{,}46^\circ - 15\angle 60^\circ \approx 23{,}98\angle -61{,}89^\circ \text{ V}
\end{aligned}$$

Conocidas las tensiones de línea del sistema, es fácil determinar las intensida-

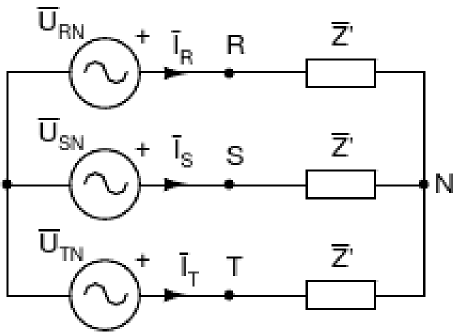


Figura 38

des de fase de la carga original:

$$\overline{I}_{RS} = \frac{\overline{U}_{RS}}{\overline{Z}} = \frac{28{,}81\angle 19{,}29^\circ}{3\angle 30^\circ} \approx 9{,}6\angle -10{,}71^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_{ST} = \frac{\overline{U}_{ST}}{\overline{Z}} = \frac{40{,}21\angle 163{,}19^\circ}{3\angle 30^\circ} \approx 13{,}40\angle 133{,}19^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_{TR} = \frac{\overline{U}_{TR}}{\overline{Z}} = \frac{23{,}98\angle -61{,}89^\circ}{3\angle 30^\circ} \approx 8\angle -91{,}89^\circ \text{ A}$$

PROBLEMA 19

El circuito de la Figura 39 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones, equilibrado y de secuencia inversa, de 380 V. Sabiendo que R=$10\,\Omega$, X_C=$-j2\,\Omega$ y $\overline{Z}$=$2+j3\,\Omega$, calcular las lecturas de los vatímetros en los siguientes casos:

1. Todos los interruptores abiertos.

2. Cerrado sólo el interruptor K_1.

3. Cerrado sólo el interruptor K_2.

4. Cerrado sólo el interruptor K_3.

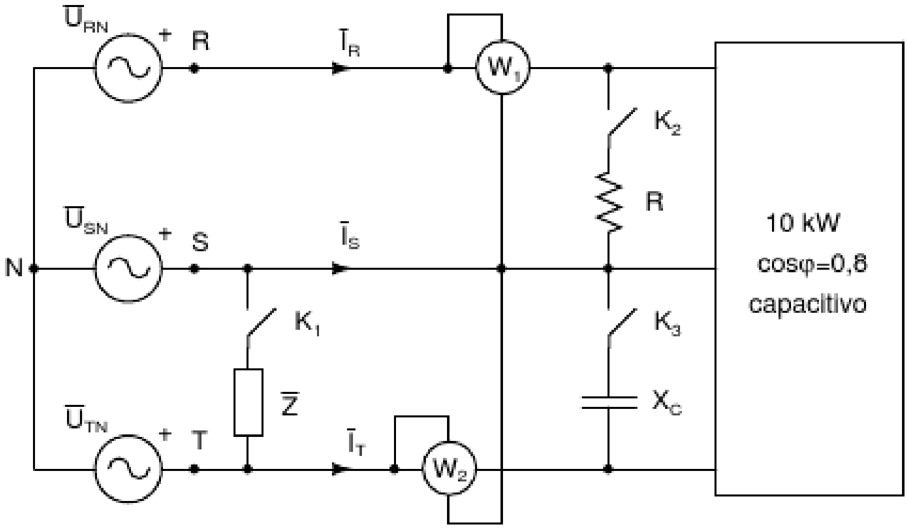


Figura 39

SOLUCIÓN 19

1. Según la Figura 39 las lecturas de los vatímetros son las siguientes:

$$W_1 = U_{RS} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_R})$$
$$W_2 = U_{TS} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TS}, \overline{I}_T})$$

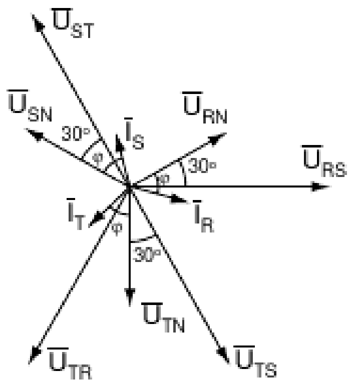


Figura 40

Cuando todos los interruptores están abiertos la carga está equilibrada y según el diagrama fasorial de la Figura 40:

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) \\ W_2 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30^\circ + \varphi) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} W_1 + W_2 = P \\ W_1 - W_2 = \dfrac{Q}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

En este caso, P y Q se obtienen a partir de los datos conocidos de la carga de $10\,\mathrm{kW}$:

$$P = 10\,000\,\mathrm{W}$$
$$Q = P \cdot \tan(\varphi) = 10\,000 \cdot \tan(-\arccos(0{,}8)) = -7\,500\,\mathrm{var}$$

En consecuencia:

$$\left.\begin{array}{l} P = W_1 + W_2 = 10\,000 \\ Q = \sqrt{3} \cdot (W_1 - W_2) = -7\,500 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} W_1 \approx 2\,835\,\mathrm{W} \\ W_2 \approx 7\,165\,\mathrm{W} \end{array}$$

2. Al cerrar K_1 las tensiones en la carga de $10\,\mathrm{kW}$ no cambian y, por tanto, sus intensidades tampoco. Los vatímetros siguen sometidos a las mismas tensiones e intensidades, y no se modifican sus lecturas.

3. Cuando se cierra K_2, los vatímetros siguen conectado según el montaje Aron aunque ahora, al estar la carga desequilibrada, sólo se puede medir potencia activa con ellos. Las nuevas lecturas de los vatímetros deben cumplir:

$$P' = W_1' + W_2'$$

El valor de la nueva potencia activa se obtiene sumando la que absorbe la resistencia de $10\,\Omega$ y la carga de $10\,\mathrm{kW}$:

$$P' = P + P_R = 10\,000 + \frac{380^2}{10} = 24\,440\,\mathrm{W}$$

Por otra parte, la lectura del vatímetro 2 no cambia ya que no lo hace ni su tensión ni su intensidad. Teniendo en cuenta esto, puede obtenerse la nueva lectura del vatímetro 1:

$$W_1' = P' - W_2 = 24\,440 - 7\,165 = 17\,275\,\mathrm{W}$$

4. Si el único interruptor que está cerrado es K_3, se tiene el método de Aron con carga desequilibrada. Además, dicho interruptor conecta en paralelo un condensador y la carga de 10 kW, de forma que la potencia activa no ha variado respecto al caso 1. En consecuencia:

$$P = W_1'' + W_2'' = 10\,000\,\mathrm{W}$$

Además, la lectura del vatímetro 1 no cambia ya que no se modifica ni la intensidad ni la tensión medida al cerrar K_3. En resumen, si la suma de los vatímetros no cambia y tampoco lo hace W_1 entonces la lectura del vatímetro 2 será la misma que la del primer apartado:

$$W_1'' = W_1 = 2\,835\,\mathrm{W} \;\; ; \;\; W_2'' = W_2 = 7\,165\,\mathrm{W}$$

PROBLEMA 20

El circuito de la Figura 41 se alimenta desde un generador trifásico equilibrado y de secuencia inversa. Estando el interruptor K cerrado, las lecturas de los vatímetros son W_1=$-1\,500$ W y W_2=$-3\,750$ W. Suponiendo que $\overline{Z}_v$ es una impedancia idéntica a la impedancia voltimétrica de los vatímetros, determinar:

1. La potencia activa y reactiva de la carga.

2. Las nuevas lecturas de los vatímetros al abrir el interruptor K.

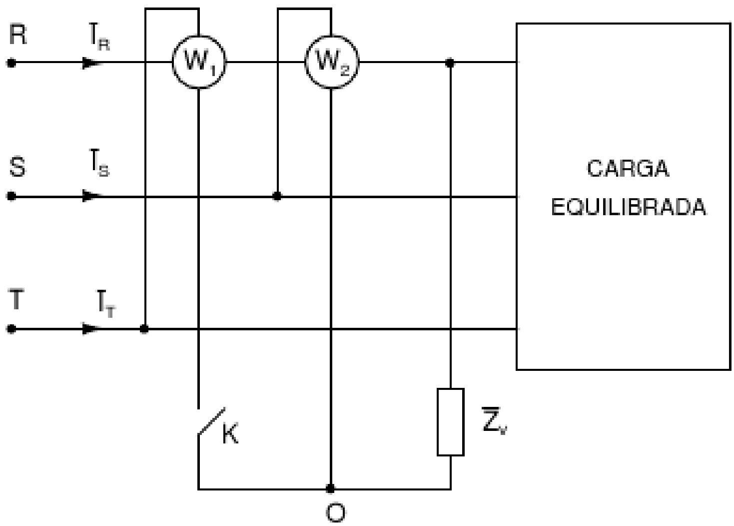


Figura 41

Solución 20

1. Estando el interruptor cerrado, las impedancias voltimétricas de los vatímetros, junto con $\overline{Z}_v$, constituyen una carga trifásica equilibrada en estrella. Por esto, su neutro (punto O) estará al mismo potencial que el neutro del generador y de la carga.

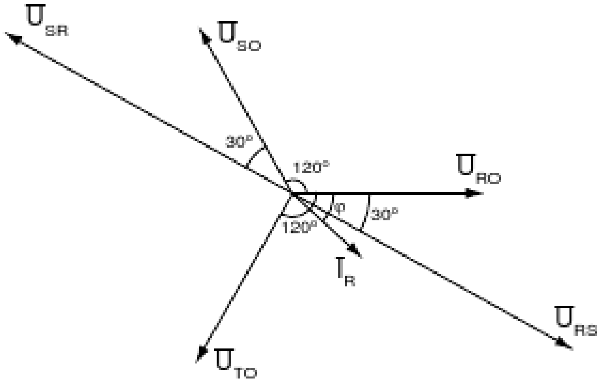


Figura 42

A partir del diagrama fasorial representado en la Figura 42 se pueden deducir las expresiones de las lecturas de los vatímetros:

$$W_1 = U_{TO} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TO}, \overline{I}_R}) = U_F \cdot I_F \cdot \cos(120^\circ - \varphi)$$
$$W_2 = U_{SO} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{SO}, \overline{I}_R}) = U_F \cdot I_F \cdot \cos(120^\circ + \varphi)$$

Desarrollando estas expresiones se tiene que

$$W_1 = U_F \cdot I_F \cdot \left(\frac{-1}{2} \cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\varphi \right)$$
$$W_2 = U_F \cdot I_F \cdot \left(\frac{-1}{2} \cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\varphi \right)$$

de donde

$$-W_1 - W_2 = U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi = \frac{P}{3}$$
$$W_1 - W_2 = \sqrt{3} \cdot U_F \cdot I_F \cdot \sin\varphi = \frac{Q}{}$$

Luego los valores de las potencias, activa y reactiva, de la carga serán:

$$P = 3 \cdot (-W_1 - W_2) = 3 \cdot (1\,500 + 3\,750) = 15\,750\,\mathrm{W}$$
$$Q = \sqrt{3} \cdot (W_1 - W_2) = \sqrt{3} \cdot (-1\,500 + 3\,750) \approx 3\,897\,\mathrm{var}$$

2. Si se abre el interruptor K, la bobina voltimétrica del vatímetro 1 queda desconectada, por lo que:

$$W_1 = 0$$

Por otra parte, la bobina voltimétrica del vatímetro 2 queda en serie con $\overline{Z}_v$, estando conectado el conjunto a la tensión de línea $\overline{U}_{SR}$. Cada una de ellas tendrá una tensión de $\overline{U}_{SR}/2$ y en consecuencia la lectura del vatímetro 2 será:

$$\begin{aligned}
W_2 &= \frac{U_{SR}}{2} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\frac{\overline{U}_{SR}}{2}, \overline{I}_R}) = \frac{U_L}{2} \cdot I_F \cdot \cos(150^\circ + \varphi) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot U_F \cdot I_F \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \cos\varphi - \frac{1}{2} \sin\varphi \right) \\
&= \frac{-3}{4} \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot U_F \cdot I_F \cdot \sin\varphi \\
&= \frac{-1}{4} P - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{Q}{3} = \frac{-P}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}} Q = \frac{-15\,750}{4} - \frac{3\,897}{4\sqrt{3}} \approx -4\,500\,\mathrm{W}
\end{aligned}$$

PROBLEMA 21

El circuito de la Figura 43 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado de $400\,$V y de secuencia desconocida. Sabiendo que W_1=3 000 y W_2=1 000, se pide:

1. Deducir la secuencia de fases.
2. Determinar los valores de R y X.

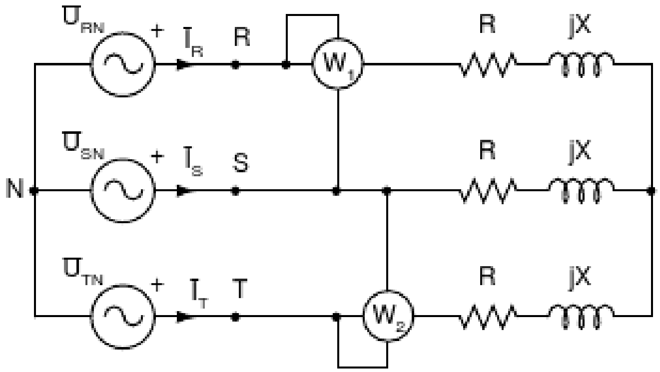


Figura 43

SOLUCIÓN 21

1. El montaje realizado con los vatímetros se corresponde con una variante del método de Aron. A partir de sus lecturas se pueden determinar las potencias, activa y reactiva, de la carga. Según la Figura 43, las lecturas de los vatímetros son:

$$W_1 = U_{RS} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_R})$$
$$W_2 = U_{ST} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{ST}, \overline{I}_T})$$

Si se supone que la secuencia de fases es directa, según el diagrama fasorial de la Figura 44 se tiene que

$$W_1 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30^\circ + \varphi) = U_L \cdot I_L \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\right]$$
$$W_2 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(150^\circ + \varphi) = U_L \cdot I_L \cdot \left[\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\right]$$

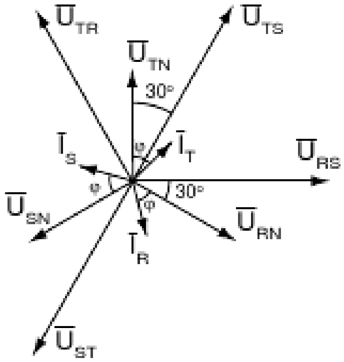


Figura 44

de donde

$$W_1 - W_2 = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P$$
$$-\sqrt{3} \cdot (W_1 + W_2) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi = Q$$

Sustituyendo valores:

$$P = W_1 - W_2 = 3\,000 - 1\,000 = 2\,000\,\mathrm{W}$$
$$Q = -\sqrt{3} \cdot (W_1 + W_2) = -\sqrt{3} \cdot (3\,000 + 1\,000) = -4\,000\sqrt{3}\,\mathrm{var}$$

Estos resultados no son los esperados ya que, al tratarse de una carga resistiva-inductiva, tiene que absorber potencia activa y reactiva y, por tanto, los signos de estas potencias han de ser ambos positivos.

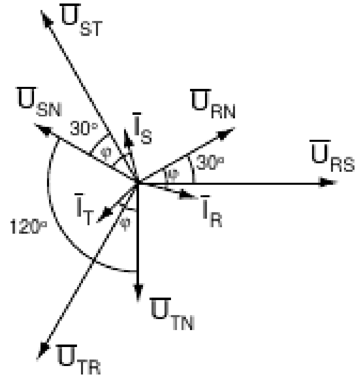


Figura 45

En cambio, si se considera una secuencia de fases inversa, según el diagrama fasorial de la Figura 45:

$$W_1 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30^\circ - \varphi) = U_L \cdot I_L \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\right]$$
$$W_2 = U_L \cdot I_L \cdot \cos(150^\circ - \varphi) = U_L \cdot I_L \cdot \left[\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\right]$$

En consecuencia:

$$W_1 - W_2 = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P$$
$$\sqrt{3} \cdot (W_1 + W_2) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi = Q$$

Sustituyendo valores resulta:

$$P = W_1 - W_2 = 3\,000 - 1\,000 = 2\,000\,\mathrm{W}$$
$$Q = \sqrt{3} \cdot (W_1 + W_2) = \sqrt{3} \cdot (3\,000 + 1\,000) = \sqrt{3} \cdot 4\,000\,\mathrm{var}$$

En este caso los signos de la potencia activa y de la reactiva son los esperados, por lo que se concluye que el sistema trifásico es de secuencia inversa.

2. Conocidas la tensión de línea del sistema de alimentación y las potencias, activa y reactiva, absorbidas por la carga, resulta fácil deducir los valores de R y X. A partir de estas potencias se obtiene el ángulo de la carga:

$$\tan\varphi = \frac{Q}{P} \implies \varphi = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3} \cdot 4\,000}{2\,000}\right) \approx 73{,}89^\circ$$

Por otro lado:

$$P = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi = 3 \cdot U_F \cdot \frac{U_F}{Z}\cos\varphi = 3\frac{U_F^2}{Z} \cdot \cos\varphi$$

$$\implies Z = \frac{3 \cdot U_F^2}{P}\cos\varphi$$

Sustituyendo valores resulta:

$$Z = \frac{3 \cdot (400/\sqrt{3})^2}{2\,000}\cos 73{,}89^\circ \approx 22{,}2\,\Omega$$

Por tanto:

$$\overline{Z} = 22{,}2\angle 73{,}89^\circ = \underbrace{6{,}16}_{R} + j\,\underbrace{21{,}33}_{X}\ \Omega$$

PROBLEMA 22

La carga trifásica de la Figura 46 se encuentra conectada a una red de $400\,\mathrm{V}$. De la carga se conoce lo siguiente:

1. Con todos los interruptores cerrados, la potencia compleja consumida es $5\,290\angle 0°$ VA.
2. Si se abre K_2, la potencia compleja consumida es $5\,290\sqrt{2}\angle -45°$ VA
3. Si se abre K_1, no consume potencia activa ni reactiva.

Determinar:

1. Los valores de las impedancias $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$ y $\overline{Z}_3$.
2. La tensión, en módulo y argumento, a la que queda sometida la carga 1 y 2 si se abren K_N y K_3.

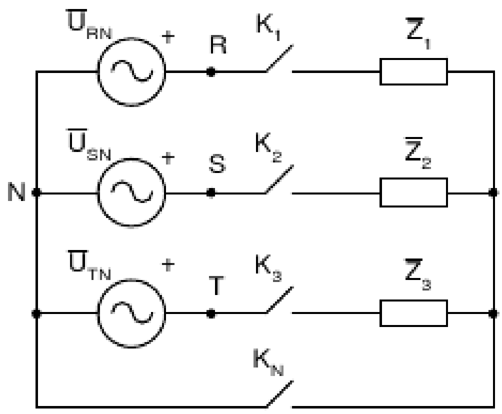


Figura 46

Solución 22

1. Con todas las cargas conectadas, se sabe que las potencias, activa y reactiva, son:

$$P_{Z1} + P_{Z2} + P_{Z3} = 5\,290\,\mathrm{W}$$

Conectando únicamente las cargas 1 y 3, resultan los siguientes valores de potencia:

$$P_{Z1} + P_{Z3} = 5\,290\,\mathrm{W}$$
$$Q_{Z1} + Q_{Z3} = -5\,290\,\mathrm{var}$$

Conectando las cargas 2 y 3, se tiene lo siguiente:

$$P_{Z2} + P_{Z3} = 0$$
$$Q_{Z2} + Q_{Z3} = 0$$

Como se trata de impedancias, es decir, elementos pasivos, se deduce que $\overline{Z}_3$ no consume potencia activa, ya que no puede ocurrir que $P_{Z2} = -P_{Z3}$. De esta forma $P_{Z2} = P_{Z3} = 0$, y por tanto P_{Z1}=5 290 W.

Por otro lado, es fácil comprobar que Q_{Z1}=0, Q_{Z2}=5 290 var y que $Q_{Z3} = -5\,290$ var.

En consecuencia, la carga 1 es una resistencia de valor:

$$R_1 = \frac{U_F^2}{P_{Z1}} = \frac{(400/\sqrt{3})^2}{5\,290} \approx 10\,\Omega$$

La carga 2 es una bobina cuya inductancia es la siguiente:

$$X_2 = \frac{U_F^2}{Q_{Z2}} = \frac{(400/\sqrt{3})^2}{5\,290} \approx 10\,\Omega$$

Por último, la carga 3 es un condensador cuya reactancia capacitiva es:

$$X_3 = \frac{U_F^2}{Q_{Z3}} = \frac{(400/\sqrt{3})^2}{-5\,290} \approx -10\,\Omega$$

En resumen, $\overline{Z}_1 = 10\angle 0^\circ\ \Omega$, $\overline{Z}_2 = 10\angle 90^\circ\ \Omega$ y $\overline{Z}_3 = 10\angle -90^\circ\ \Omega$.

2. Al abrirse K_N, la tensión en cada impedancia ya no será la de fase del generador trifásico, sino que dependerá de la relación entre impedancias. Como, además, también se indica que el interruptor K_3 está abierto, las tensiones a las que quedan sometidas $\overline{Z}_1$ y $\overline{Z}_2$ se pueden obtener fácilmente resolviendo el divisor de tensión de la Figura 47:

$$\overline{U}_{Z1} = \overline{U}_{RS} \cdot \frac{\overline{Z}_1}{\cdots} \ ; \ \overline{U}_{Z2} = \overline{U}_{RS} \cdot \frac{\overline{Z}_2}{\cdots}$$

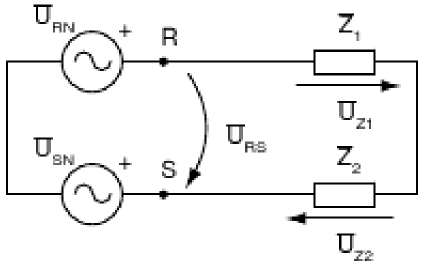


Figura 47

Tomando $\overline{U}_{RS}$ como origen de fases, resulta:

$$\overline{U}_{Z1} = 400\angle 0^\circ \cdot \frac{10\angle 0^\circ}{10\angle 0^\circ + 10\angle 90^\circ} = \frac{400}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ \text{ V}$$
$$\overline{U}_{Z2} = 400\angle 0^\circ \cdot \frac{10\angle 90^\circ}{10\angle 0^\circ + 10\angle 90^\circ} = \frac{400}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ \text{ V}$$

PROBLEMA 23

Una red trifásica de 400 V, 50 Hz alimenta a una industria formada por los siguientes receptores (Figura 48):

- Una bomba trifásica de 50 CV, η=0,9, $\cos\varphi$=0,8.
- Un receptor trifásico inductivo que absorbe 30 A con $\cos\varphi$=0,7.
- Tres líneas monofásicas de alumbrado, cada una de las cuales está formada por 10 lámparas incandescentes de 100 W. Cada línea se alimenta de una fase.

Calcular:

1. La corriente total de línea.
2. El factor de potencia total.
3. La capacidad de la batería de condensadores en estrella que es necesario conectar para obtener un factor de potencia total en la industria de 0,9 inductivo.

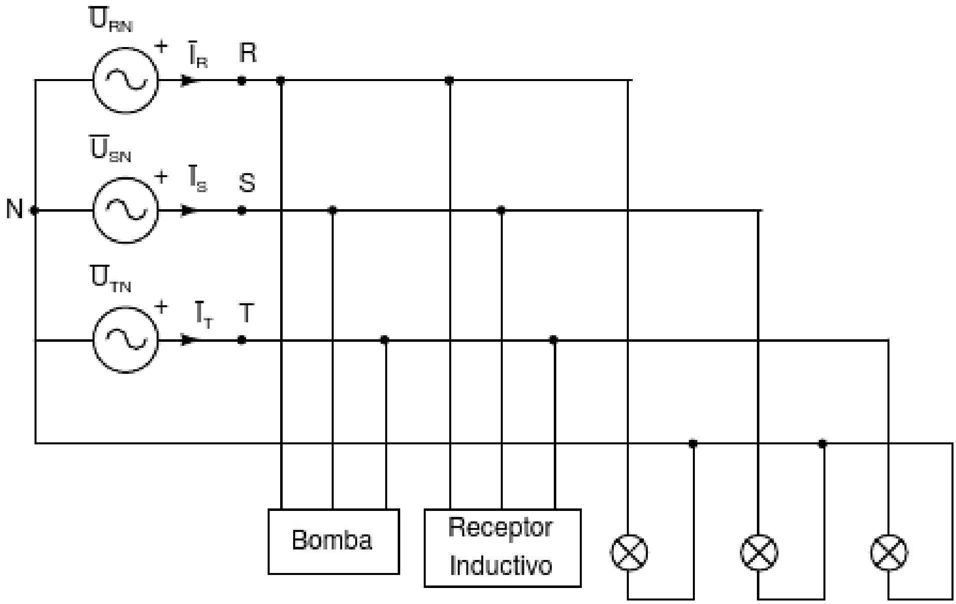


Figura 48

SOLUCIÓN 23

1. La potencia activa y reactiva total es:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3$$
$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

siendo P_1 y Q_1, respectivamente, las potencias activa y reactiva de la bomba; P_2 y Q_2 las del receptor inductivo y P_3, Q_3 las del conjunto de líneas de alumbrado.

Según los datos del enunciado, los valores de estas potencias son los siguientes:

$$P_1 = \frac{P_{util}}{\eta} = \frac{50 \cdot 736}{0{,}9} \approx 40\,888{,}9\,\mathrm{W}$$
$$P_2 = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_2 = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 30 \cdot 0{,}7 \approx 14\,549{,}23\mathrm{W}$$
$$P_3 = 3 \cdot 10 \cdot 100 = 3\,000\,\mathrm{W}$$

En consecuencia:

Por otro lado:

$$Q_1 = P_1 \cdot \tan\varphi_1 = 40\,888{,}9 \cdot \tan(\arccos 0{,}8) \approx 30\,666{,}7\,\text{var}$$
$$Q_2 = P_1 \cdot \tan\varphi_1 = 14\,549{,}23 \cdot \tan(\arccos 0{,}7) \approx 14\,843{,}18\,\text{var}$$
$$Q_3 = 0, \text{ por tratarse de lámparas incandescentes}$$

Por tanto:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 30\,666{,}7 + 14\,843{,}18 = 45\,509{,}88\,\text{var}$$

Una vez realizado el balance de potencias, la corriente de línea se puede obtener a partir de la potencia aparente:

$$I_T = \frac{S_T}{\sqrt{3} \cdot U_L} = \frac{\sqrt{P_T^2 + Q_T^2}}{\sqrt{3} \cdot U_L}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$I_T = \frac{\sqrt{58\,438{,}13^2 + 45\,509{,}88^2}}{\sqrt{3} \cdot 400} \approx 106{,}91\,\text{A}$$

2. El factor de potencia total se puede calcular a partir de las potencias, activa y reactiva, totales:

$$\cos\varphi_T = \cos\left(\arctan\frac{Q_T}{P_T} = \cos\left(\arctan\frac{45\,509{,}88}{58\,438{,}18}\right)\right)$$
$$\approx 0{,}79 \text{ en retraso o inductivo}$$

3. Obtener un factor de potencia de $0{,}9$ inductivo en la instalación, manteniendo constante el consumo de potencia activa, implica reducir el consumo de potencia reactiva desde $45\,509{,}88$ var hasta un valor de

$$Q = P_T \cdot \tan\varphi_N = 58\,438{,}18 \cdot \tan(\arccos 0{,}9) \approx 28\,302{,}9\,\text{var}$$

La diferencia entre la potencia reactiva anterior y la deseada debe proporcionarla la batería de condensadores, cuyo valor será:

$$Q_C = Q - Q_T = 28\,302{,}9 - 45\,509{,}88 = -17\,206{,}98\text{var}$$

La reactancia por fase necesaria para conseguir ese valor de potencia reactiva, teniendo en cuenta que los condensadores están dispuestos en estrella, es:

$$-1 \qquad 3 \cdot U_F^2$$

Despejando y sustituyendo valores se obtiene la capacidad por fase de la batería de condensadores:

$$C = \frac{-Q_C}{3 \cdot U_F^2 \cdot \omega} = \frac{17\,206{,}98}{3 \cdot (400/\sqrt{3})^2 \cdot 2\pi \cdot 50} \approx 342{,}32\,\mu\text{F}$$

PROBLEMA 24

El circuito pasivo equilibrado de la Figura 49 tiene un factor de potencia $\sqrt{3}/2$ capacitivo. Suponiendo que la red de alimentación es de secuencia directa, calcular:

1. La relación entre las lecturas de los vatímetros con K cerrado.
2. La relación entre las lecturas de los vatímetros con K abierto.

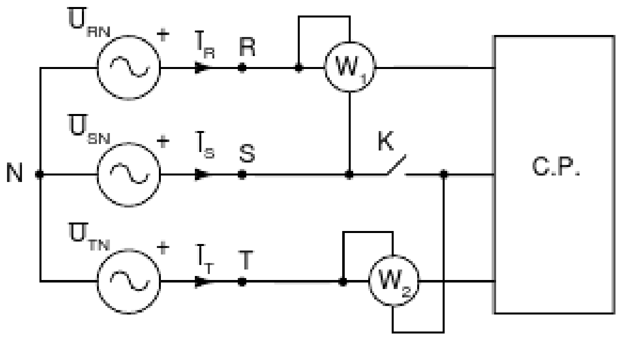


Figura 49

SOLUCIÓN 24

1. Considerando el diagrama fasorial de la Figura 50, donde se representan las magnitudes del circuito con K cerrado, resultan las siguientes expresiones para las lecturas de los vatímetros:

$$W_1 = U_{RS} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_R}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos 0^\circ = U_L \cdot I_L$$
$$W_2 = U_{TS} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TS}, \overline{I}_T}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos 60^\circ = \frac{U_L \cdot I_L}{2}$$

De este modo, la relación entre las lecturas de los vatímetros es la siguiente:

$$\frac{W_1}{W_2} = 2$$

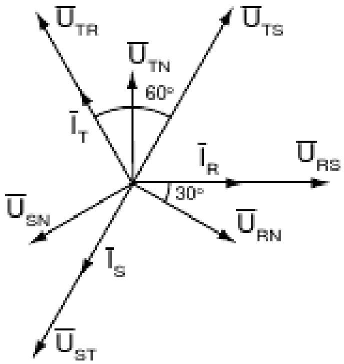


Figura 50

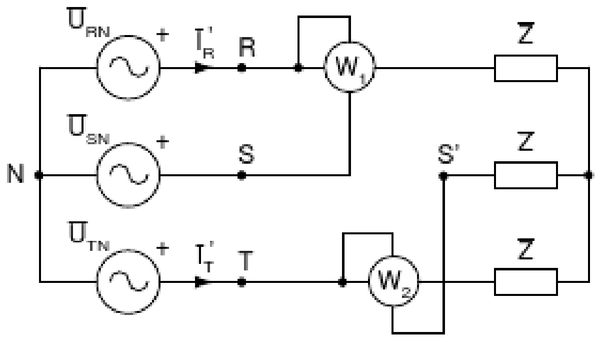


Figura 51

2. Al abrir el interruptor K, queda el circuito mostrado en la Figura 51.

Teniendo en cuenta que en esta configuración las impedancias de las fases R y T quedan conectadas en serie, las intensidades de línea involucradas en las nuevas medidas de los vatímetros son las siguientes:

$$\overline{I}'_R = \frac{\overline{U}_{RT}}{2 \cdot \overline{Z}} = \frac{\overline{U}_{RN} - \overline{U}_{TN}}{2 \cdot \overline{Z}} = \frac{U_L \angle -60^\circ}{2 \cdot Z \angle -30^\circ} = \frac{U_L}{2 \cdot Z} \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}'_T = -\overline{I}'_R = \frac{U_L}{2 \cdot Z} \angle 150^\circ \text{ A}$$

La tensión medida por el vatímetro 1 coincide con la tensión de línea del generador:

$$\overline{U}_{RS} = U_L \angle 0^\circ \text{ V}$$

Sin embargo, la bobina voltimétrica del vatímetro 2 mide la diferencia de potencial en la carga conectada a la fase T. De este modo resulta:

$$\overline{U}'_{TS'} = -\overline{I}'_R\overline{Z} = \frac{-\overline{U}_{RT}}{2\cdot\overline{Z}}\cdot\overline{Z} = \frac{-U_L\angle-60^\circ}{2} = \frac{U_L}{2}\angle 120^\circ \text{ V}$$

Así pues, las lecturas de los vatímetros serán las siguientes:

$$W_1 = U_{RS}\cdot I'_R\cdot\cos(\widehat{\overline{U}_{RS},\overline{I}'_R}) = U_L\cdot\frac{U_L}{2\cdot Z}\cdot\cos(0^\circ+30^\circ) = \frac{U_L^2}{2\cdot Z}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$W_2 = U_{TS'}\cdot I'_T\cdot\cos(\widehat{\overline{U}'_{TS'},\overline{I}'_T}) = \frac{U_L}{2}\cdot\frac{U_L}{2\cdot Z}\cdot\cos(120^\circ-150^\circ) = \frac{U_L^2}{4\cdot Z}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y la relación solicitada resulta:

$$\frac{W_1}{W_2} = 2$$

PROBLEMA 25

El circuito de la Figura 52 se alimenta de una fuente trifásica equilibrada de 400 V y de secuencia directa. C.P. representa un circuito pasivo equilibrado. Con K abierto, las lecturas de los vatímetros son: W_1=2 070,55 W y W_2=−7 727,41 W. Al cerrar el interruptor K, la lectura del amperímetro no varía. Calcular:

1. La potencia compleja del circuito pasivo C.P.

2. Las lecturas de los instrumentos de medida con K cerrado.

3. El valor de C.

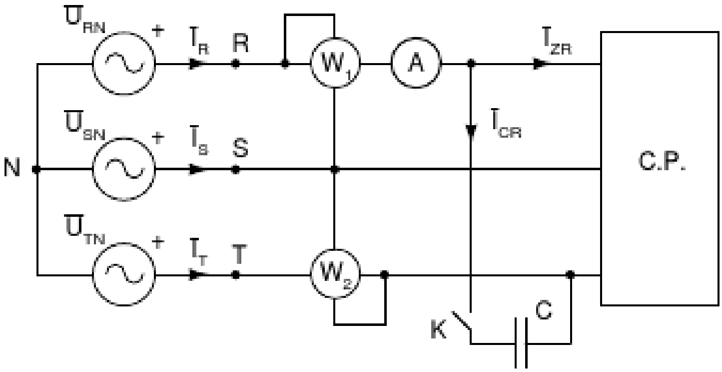


Figura 52

SOLUCIÓN 25

1. Considerando que el interruptor K está abierto y que los vatímetros están colocados según el método de Aron, se puede obtener la potencia compleja a partir de las lecturas de los vatímetros. Para ello, se utilizan las relaciones entre magnitudes dadas en el diagrama fasorial de la Figura 53.

   De este modo, se tiene que los vatímetros miden lo siguiente:

$$W_1 = U_{RS} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_R}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30° + \varphi)$$
$$W_2 = U_{ST} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{ST}, \overline{I}_T}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(150° + \varphi)$$

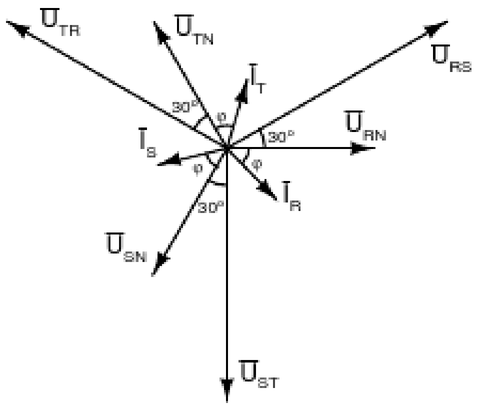


Figura 53

Desarrollando el valor de las lecturas anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} W_1 &= U_L \cdot I_L \cdot [\cos 30^\circ \cdot \cos\varphi - \sin 30^\circ \cdot \sin\varphi] \\ &= U_L \cdot I_L \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi\right] \\ W_2 &= U_L \cdot I_L \cdot [\cos 150^\circ \cdot \cos\varphi - \sin 150^\circ \cdot \sin\varphi] \\ &= U_L \cdot I_L \cdot \left[\frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi\right] \end{aligned}$$

Operando con ambas lecturas se obtienen las potencias, activa y reactiva, del circuito pasivo equilibrado:

$$\begin{aligned} W_1 - W_2 &= \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P \\ -\sqrt{3}(W_1 + W_2) &= \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi = Q \end{aligned}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned} P &= 2070{,}55 - (-7\,727{,}41) = 9\,797{,}96\,\mathrm{W} \\ Q &= -\sqrt{3}(2\,070{,}55 - 7\,727{,}41) = 9\,797{,}96\,\mathrm{var} \end{aligned}$$

La potencia compleja resulta:

$$\overline{S} = P + jQ = 13\,856{,}41\angle 45^\circ$$

2. Con el interruptor K cerrado, la lectura del amperímetro no varía. Esto indica que al conectar el condensador la intensidad de la línea R tendrá el mismo módulo, por lo que la variación en el ángulo tendrá que ser simétrica respecto al fasor de la tensión aplicada al condensador.

Según la Figura 52, la tensión del condensador es $\overline{U}_{RT}$ y la intensidad es $\overline{I}_C$. La intensidad que circula por C.P. es la misma que la que circula con el interruptor abierto. Así pues, resulta el diagrama fasorial de la Figura 54, donde $\overline{I}'_R$ es la nueva intensidad de línea para el conjunto de elementos.

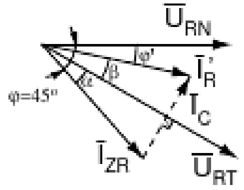


Figura 54

En dicho diagrama, se ha representado la intensidad del condensador adelantada 90° respecto a $\overline{U}_{RT}$, de modo que se cumple:

$$\overline{I}'_R = \overline{I}_{ZR} + \overline{I}_C$$

Como se indicó al principio del apartado, la nueva intensidad resultante será simétrica a la obtenida en el apartado anterior respecto a $\overline{U}_{RT}$, de forma que el módulo no varíe al conectar el condensador. De este modo, teniendo en cuenta que $\varphi = 45°$, se deduce que $\alpha = 15°$ y que $\beta = 15°$, por lo que $\varphi' = 45 - \alpha - \beta = 15°$.

Como la potencia de C.P. es conocida, el valor de $\overline{I}_{ZR}$ resulta:

$$I_{ZR} = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_L \cdot \cos\varphi} = \frac{9\,797{,}96}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot \sqrt{2}/2} = 20\,\mathrm{A}$$

Así pues, la lectura del amperímetro con K cerrado es de 20 A.

Atendiendo a los diagramas fasoriales de las Figuras 53 y 54, la lectura de W_1 es:

$$\begin{aligned} W_1 &= U_{RS} \cdot I'_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}'_R}) = U_{RS} \cdot I'_R \cdot \cos(30° + \varphi') \\ &= 400 \cdot 20 \cdot \cos 45° \approx 5\,656{,}85\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los vatímetros tienen una conexión derivada del método de Aron, aunque el sistema esté ahora desequilibrado, la potencia activa seguirá verificando la siguiente relación:

$$P = W_1 - W_2$$

Dado que la potencia activa no ha variado al conectar el condensador, se obtiene el siguiente valor de W_2:

$$W_2 = W_1 - P = 5\,656{,}85 - 9\,797{,}96 = -4\,141{,}11\,\mathrm{W}$$

3. Teniendo en cuenta el diagrama fasorial de la Figura 54, se deduce que la intensidad del condensador es:

$$I_C = 2 \cdot I_{ZR} \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 20 \cdot \sin 15^\circ \approx 10{,}35\,\mathrm{A}$$

Como la tensión aplicada al condensador es conocida, se puede obtener la impedancia que presenta el mismo y, de ahí, su capacidad, considerando un frecuencia industrial de 50 Hz, resultando:

$$X_C = \frac{U_{RT}}{I_C} = \frac{400}{10{,}35} = 38{,}65\,\Omega$$

Por tanto:

$$C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{X_C \cdot 2\pi \cdot f} = \frac{1}{38{,}65 \cdot 100\pi} \approx 82{,}36\,\mu\mathrm{F}$$

PROBLEMA 26

El circuito trifásico de la Figura 55 se encuentra alimentado por un generador trifásico, equilibrado y de secuencia inversa, de 400 V. Se sabe que W_1=-1500 W y W_2=500 W en las dos situaciones siguientes:

- K_1, K_3 cerrados y K_2 abierto.
- K_1, K_3 abiertos y K_2 cerrado.

Obtener lo siguiente:

1. La impedancia $\overline{Z}$.

2. La resistencia R_1.

3. Las lecturas de ambos vatímetros si K_1 está cerrado y K_2, K_3 abiertos.

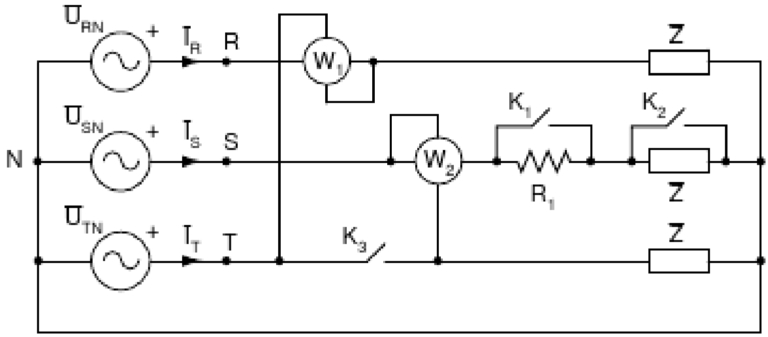


Figura 55

Solución 26

1. Con K_1 y K_3 cerrados, y K_2 abierto, el sistema está equilibrado.

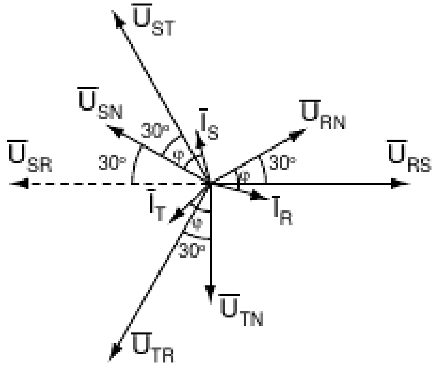


Figura 56

Según el diagrama fasorial de la Figura 56, las lecturas de los vatímetros 1 y 2 son las siguientes:

$$W_1 = U_{TR} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TR}, \overline{I}_R}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(150^\circ - \varphi)$$
$$= U_L \cdot I_L \cdot (\frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi)$$
$$W_2 = U_{ST} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{ST}, \overline{I}_S}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30^\circ - \varphi)$$
$$= U_L \cdot I_L \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi)$$

Si se restan las lecturas de ambos vatímetros se obtiene la potencia activa trifásica consumida por la carga:

$$W_2 - W_1 = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P$$

Si ahora se suman las lecturas de ambos vatímetros se obtiene la potencia reactiva trifásica consumida por la carga:

$$W_1 + W_2 = U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Por tanto:

$$P = W_2 - W_1 = 500 + 1\,500 = 2\,000\,\mathrm{W}$$
$$Q = \sqrt{3} \cdot (W_1 + W_2) = \sqrt{3} \cdot (-1\,500 + 500) = -\sqrt{3} \cdot 1\,000\,\mathrm{var}$$

Con K_1 y K_3 cerrados, y K_2 abierto, P y Q es la potencia activa y la potencia reactiva consumida por la carga $\overline{Z}$ ya que la resistencia R se encuentra cortocircuitada. De esta forma:

$$\overline{Z} = \frac{3 \cdot U_{RN}^2}{\overline{S}^*} = \frac{3 \cdot U_{RN}^2}{P - j \cdot Q} = \frac{3 \cdot (400/\sqrt{3})^2}{2\,000 + j \cdot \sqrt{3} \cdot 1\,000} \approx 60{,}47\angle{-40{,}89^\circ}\,\Omega$$

2. Con K_1 y K_3 abiertos, y K_2 cerrado, el sistema resultante se encuentra desequilibrado. Además, no circula intensidad por la fase T y la única carga conectada a la fase S es la resistencia R_1. De esta forma, la lectura del vatímetro 2 es la siguiente:

$$W_2 = U_{SN} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{SN}, \overline{I}_S}) = P_{R_1}$$

Por otra parte, la potencia que absorbe la resistencia R_1 se puede expresar de la siguiente forma:

$$P_{R_1} = \frac{U_{SN}^2}{R_1}$$

En consecuencia:

$$R_1 = \frac{U_{SN}^2}{W_2} = \frac{(400/\sqrt{3})^2}{500} \approx 106{,}67\,\Omega$$

3. Con K_2 y K_3 abiertos, y K_1 cerrado, se puede comprobar que la vatímetro 1 no cambia, ya que no se modifica ni su tensión, ni su intensidad, ni su desfase entre ellas. Además, estas circunstancias no circula intensidad por la fase T y la única carga conectada a la fase S es Z. De esta forma, la lectura del vatímetro 2 es la siguiente:

$$W_2 = U_{SN} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{SN}, \overline{I}_S}) = P_Z = R_Z \cdot I_S^2 = R_Z \cdot \left(\frac{U_{SN}}{Z}\right)^2$$
$$= Z \cdot \cos\varphi_Z \cdot \left(\frac{U_{SN}}{Z}\right)^2 = \frac{\cos(-40{,}89^\circ) \cdot (400/\sqrt{3})^2}{60{,}48} \approx 666{,}6\,\mathrm{W}$$

PROBLEMA 27

El circuito trifásico de la Figura 57 se encuentra conectado a un generador trifásico ideal, equilibrado y de secuencia directa. Se sabe que $\overline{Z}_1$=$5\angle-90^\circ\ \Omega$, $\overline{Z}_2$=$2{,}5\angle-90^\circ\ \Omega$, $\overline{Z} = 5\angle 90^\circ\ \Omega$ y que el voltímetro mide $690\,$V. Calcular las lecturas de los amperímetros.

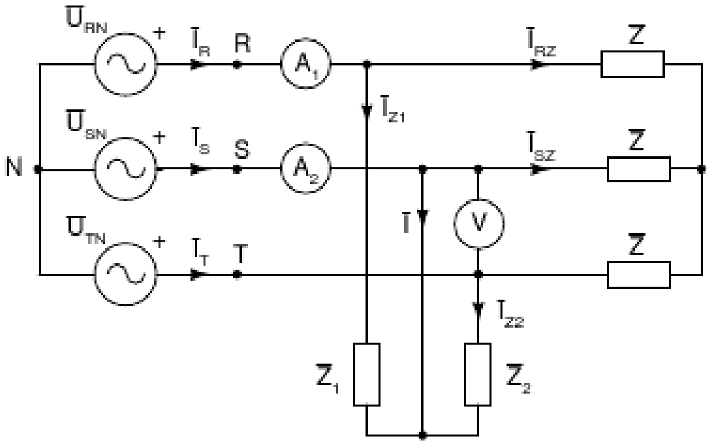


Figura 57

Solución 27

Según las referencias adoptadas en la Figura 57, y teniendo en cuenta que la carga $\overline{Z}$ está equilibrada:

$$\overline{I}_{RZ} = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}} = \frac{\frac{690}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{5\angle 90^\circ} = \frac{138}{\sqrt{3}}\angle -90^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\overline{I}_{SZ} = \frac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}} = \frac{\frac{690}{\sqrt{3}}\angle-120^\circ}{5\angle 90^\circ} = \frac{138}{\sqrt{3}}\angle 150^\circ \text{ A}$$

Por otro lado, la intensidades que circulan por las cargas $\overline{Z}_1$ y $\overline{Z}_2$ son, respectivamente:

$$\overline{I}_{Z1} = \frac{\overline{U}_{RS}}{\overline{Z}_1} = \frac{\overline{U}_{RN}-\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_1} = \frac{\frac{690}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ - \frac{690}{\sqrt{3}}\angle-120^\circ}{5\angle-90^\circ} = 138\angle 120^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}_{Z2} = \frac{\overline{U}_{TS}}{\overline{Z}_2} = \frac{\overline{U}_{TN}-\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_2} = \frac{\frac{690}{\sqrt{3}}\angle 120^\circ - \frac{690}{\sqrt{3}}\angle-120^\circ}{2{,}5\angle-90^\circ} = 276\angle 180^\circ \text{ A}$$

De esta forma:

$$\overline{I} = -\left(\overline{I}_{Z1}+\overline{I}_{Z2}\right) = -\left(138\angle 120^\circ + 276\angle 180^\circ\right) \approx 365{,}11\angle-19{,}11^\circ \text{ A}$$

Por tanto, las lecturas de los amperímetros son la siguientes:

$$A_1 = \left|\overline{I}_{RZ}+\overline{I}_{Z1}\right| = \left|\frac{138}{\sqrt{3}}\angle-90^\circ + 138\angle 120^\circ\right| \approx |79{,}67\angle 150^\circ| = 79{,}67 \text{ A}$$

$$A_2 = \left|\overline{I}_{SZ}+\overline{I}\right| = \left|\frac{138}{\sqrt{3}}\angle 150^\circ + 365{,}11\angle-19{,}11^\circ\right|$$
$$\approx |287{,}27\angle-16{,}11^\circ| = 287{,}27 \text{ A}$$

PROBLEMA 28

El circuito trifásico de la Figura 58 se encuentra conectado a un generador trifásico ideal, equilibrado y de secuencia directa. Se sabe que $\overline{Z}_L$=$5\angle 90^\circ\ \Omega$, $\overline{Z}_1$=$5\angle-90^\circ\ \Omega$, $\overline{Z}_2$=$2{,}5\angle-90^\circ\ \Omega$, $\overline{Z}$=$\frac{5}{3}\angle 90^\circ\ \Omega$ y que el voltímetro mide 690 V. Calcular la lectura del amperímetro.

Solución 28

Para analizar circuitos trifásicos con cargas desequilibradas resulta muy cómodo reducir dichas cargas a una sola. Para ello, el primer paso es convertir las cargas conectadas en estrella a su triángulo equivalente (Figura 59).

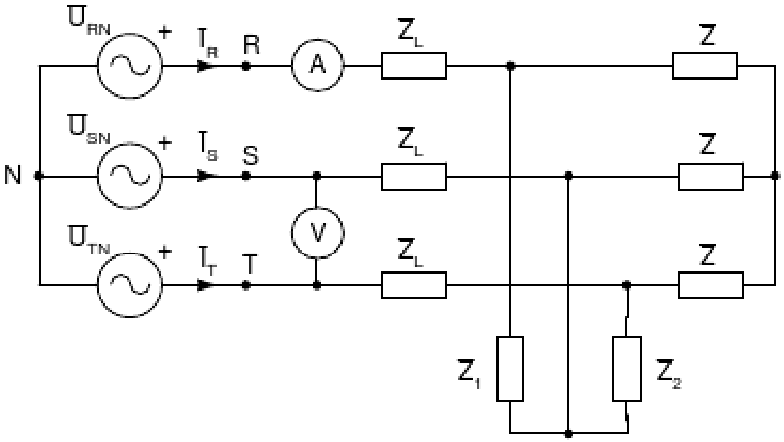


Figura 58

El segundo paso consiste en obtener el triángulo equivalente del conjunto mediante el paralelo de las impedancias de cada una de las fases:

$$\overline{Z}_{T1} = \frac{3 \cdot \overline{Z} \cdot \overline{Z}_1}{3 \cdot \overline{Z} + \overline{Z}_1} = \frac{3 \cdot (5/3\angle 90^\circ) \cdot 5\angle -90^\circ}{3 \cdot (5/3\angle 90^\circ) + 5\angle -90^\circ} = \frac{25\angle 0^\circ}{0} \rightarrow \infty \text{ (circ. abierto)}$$

$$\overline{Z}_{T2} = \frac{3 \cdot \overline{Z} \cdot \overline{Z}_2}{3 \cdot \overline{Z} + \overline{Z}_2} = \frac{3 \cdot (5/3\angle 90^\circ) \cdot 2{,}5\angle -90^\circ}{3 \cdot (5/3\angle 90^\circ) + 2{,}5\angle -90^\circ} = \frac{12{,}5\angle 0^\circ}{2{,}5\angle 90^\circ} = 5\angle -90^\circ\ \Omega$$

En la Figura 60 se ha representado el circuito resultante. Si se asocian en serie las impedancias que aparecen en la Figura 60 se obtiene lo siguiente:

$$\overline{Z}_{eq1} = \overline{Z}_L + 3 \cdot \overline{Z} = 5\angle 90^\circ + 3 \cdot (5/3\angle 90^\circ) = 10\angle 90^\circ\ \Omega$$

$$\overline{Z}_{eq2} = \overline{Z}_L + \overline{Z}_{T2} = 5\angle 90^\circ + 5\angle -90^\circ = 0\,\Omega$$

El circuito resultante se ha representado en la Figura 61. A partir de dicha figura:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RS}}{\overline{Z}_{eq1}} = \frac{690\angle 0^\circ}{10\angle 90^\circ} = 69\angle -90^\circ\ \text{A}$$

Por tanto, la lectura del amperímetro es de 69 A.

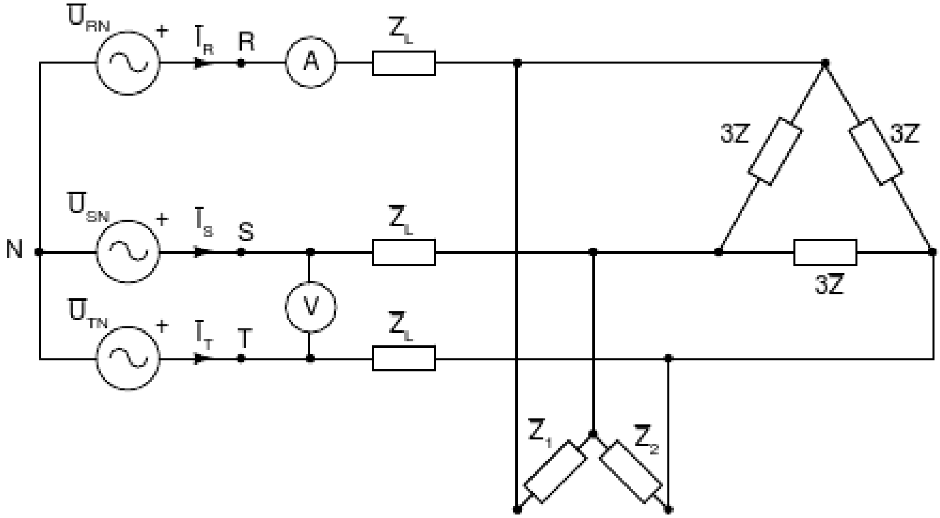


Figura 59

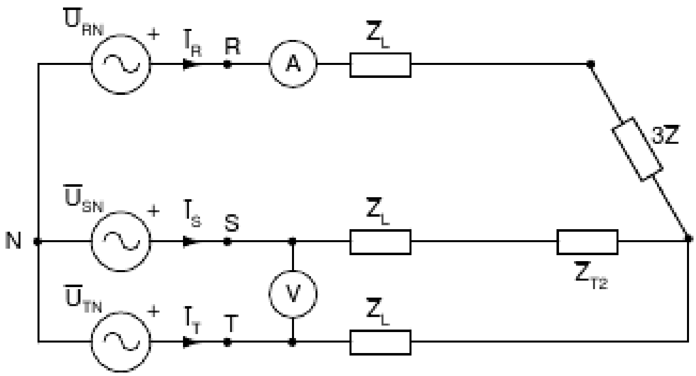


Figura 60

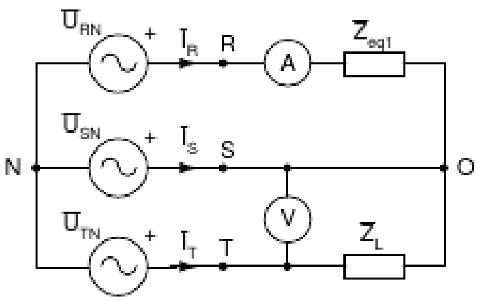


Figura 61

PROBLEMA 29

En la Figura 62 se muestra una de las fases de un sistema trifásico equilibrado en determinadas condiciones de funcionamiento. Dicho sistema está compuesto por un generador ideal cuya tensión es $\overline{U}_s$=$U\angle\delta$ que alimenta a una carga a través de una línea cuya inductancia es jX. La tensión en la carga es $\overline{U}_r$=$U\angle 0°$. En función de U, X y δ, determinar:

1. Las potencias, activa y reactiva, suministradas por la fuente de tensión.

2. Las potencias, activa y reactiva, absorbidas por la carga.

3. La potencia reactiva absorbida por la línea.

4. El fasor tensión en el punto M (mitad de la línea).

5. Con K cerrado, el valor de la fuente de intensidad para que en el punto M la tensión sea $U\angle(\delta/2)$.

6. En las condiciones del apartado anterior, la potencia activa suministrada por la fuente de tensión.

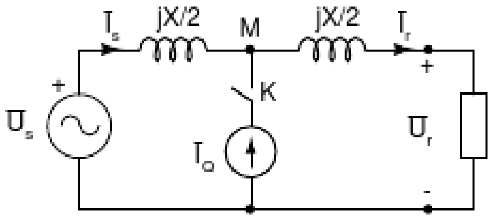


Figura 62

SOLUCIÓN 29

1. Según la Figura 62, con K abierto:

$$\overline{I}_s = \overline{I}_r = \frac{\overline{U}_s - \overline{U}_r}{jX} = \frac{U\angle\delta - U\angle 0°}{X\angle 90°} = \frac{U}{X}\angle\delta - 90° + \frac{U}{X}\angle 90°$$

Las potencias, activa y reactiva, suministradas por la fuente de tensión se obtienen a partir de la potencia compleja:

$$\overline{S}_s = \overline{U}_s \cdot \overline{I}_s^* = U\angle\delta \cdot \left(\frac{U}{X}\angle\delta - 90^\circ + \frac{U}{X}\angle 90^\circ\right)^*$$

$$= \frac{U^2}{X}\angle 90^\circ + \frac{U^2}{X}\angle\delta - 90^\circ = \underbrace{\frac{U^2}{X}\cdot\sin\delta}_{P_s} + j\cdot\underbrace{\frac{U^2}{X}\cdot(1-\cos\delta)}_{Q_s}$$

2. Del mismo modo, las potencias, activa y reactiva, absorbidas por la carga son:

$$\overline{S}_r = \overline{U}_r \cdot \overline{I}_r^* = U\angle 0^\circ \cdot \left(\frac{U}{X}\angle\delta - 90^\circ + \frac{U}{X}\angle 90^\circ\right)^*$$

$$= \frac{U^2}{X}\angle 90^\circ - \delta + \frac{U^2}{X}\angle - 90^\circ = \underbrace{\frac{U^2}{X}\cdot\sin\delta}_{P_r} + j\cdot\underbrace{\frac{U^2}{X}\cdot(\cos\delta - 1)}_{Q_r}$$

Lógicamente P_s=P_r ya que se ha despreciado la parte resistiva de la línea, y sólo consume potencia reactiva.

3. Una vez conocida la potencia reactiva que suministra la fuente de tensión y la que absorbe la carga, la diferencia entre ambas proporciona la potencia reactiva que consume la línea:

$$Q_L = Q_s - Q_r = \frac{U^2}{X}\cdot(1-\cos\delta) - \frac{U^2}{X}\cdot(\cos\delta - 1) = \frac{2\cdot U^2}{X}\cdot(1-\cos\delta)$$

4. La tensión en el punto M es la siguiente:

$$\overline{U}_M = U\angle 0^\circ + j\cdot\frac{X}{2}\cdot\overline{I}_r = U\angle 0^\circ + j\cdot\frac{X}{2}\cdot\frac{U\angle\delta - U\angle 0^\circ}{X\angle 90^\circ}$$

$$= U\angle 0^\circ + j\cdot\frac{X}{2}\cdot\frac{U\angle\delta - U\angle 0^\circ}{j\cdot X} = U\angle 0^\circ + \frac{U\angle\delta - U\angle 0^\circ}{2}$$

$$= \frac{U\angle\delta + U\angle 0^\circ}{2} = \frac{U\cdot\cos\delta + j\cdot U\cdot\sin\delta + U}{2}$$

$$= \frac{U}{2}\cdot(1+\cos\delta) + j\cdot\frac{U}{2}\cdot\sin\delta = U\cdot\cos(\delta/2)\angle\delta/2$$

5. Si K está cerrado y la tensión el punto M ha de ser $U\angle(\delta/2)$, entonces las intensidades $\overline{I}_s$ y $\overline{I}_r$ son:

$$\overline{I}_s = \frac{U\angle\delta - U\angle\delta/2}{j\cdot X/2} \;\; ; \;\; \overline{I}_r = \frac{U\angle\delta/2 - U\angle 0^\circ}{j\cdot X/2}$$

De esta forma, el valor que ha de tener la fuente de intensidad es el siguiente:

$$\overline{I}_Q = \overline{I}_r - \overline{I}_s = \frac{U\angle\delta/2 - U\angle 0^\circ}{j \cdot X/2} - \frac{U\angle\delta - U\angle\delta/2}{j \cdot X/2}$$
$$= \frac{2U\angle\delta/2 - U\angle 0^\circ - U\angle\delta}{j \cdot X/2} = \frac{4U}{X} \cdot (1 - \cos(\delta/2))\angle\delta/2 - 90^\circ$$

6. Como se puede comprobar, $\overline{U}_M$ y $\overline{I}_Q$ están en cuadratura. Por tanto, la fuente de intensidad sólo intercambia potencia reactiva con el sistema. En estas circunstancias la potencia activa que suministra la fuente permanece inalterada e igual a la calculada en los apartados anteriores.

PROBLEMA 30

El sistema trifásico equilibrado de la Figura 63 se encuentra alimentado de una red de 400 V. Se sabe que R=10 Ω y que L puede adoptar cualquier valor comprendido entre 0 y 0,2 H.

Sabiendo que se dispone de condensadores de 3 μF, calcular el número mínimo de éstos que será necesario disponer por fase para que, bajo cualquier régimen de carga, el factor de potencia del conjunto sea mayor de 0,95.

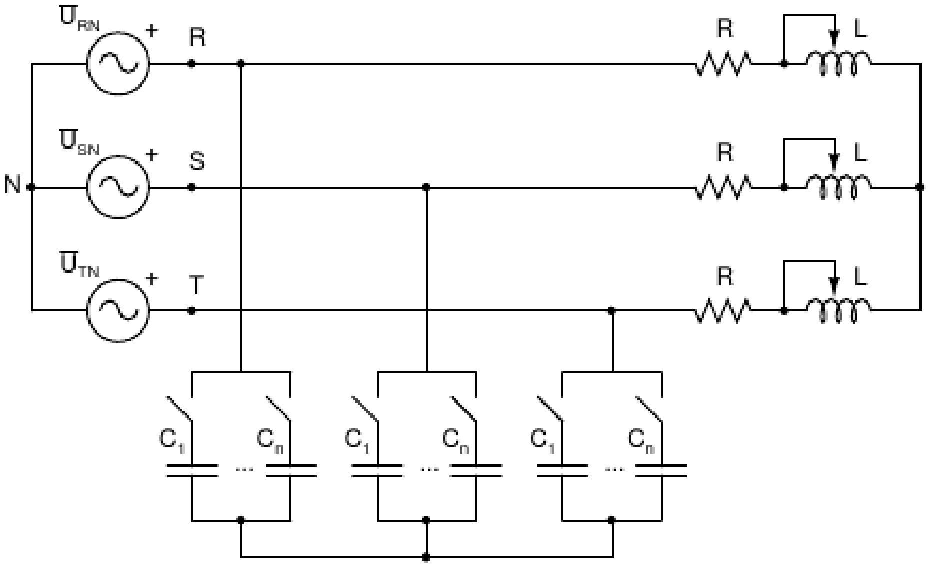


Figura 63

Solución 30

Para una determinada condición de operación, la potencia reactiva que demanda la carga es Q, mientras que la que demanda el conjunto carga-condensadores es:

$$Q_N = P \cdot \tan \varphi_N$$

donde, según en el enunciado

$$\varphi_N = \mathrm{arc}\cos(0{,}95)$$

De esta forma, la potencia reactiva que debe suministrar la batería de condensadores es

$$Q_C = Q - Q_N = Q - P \cdot \tan \varphi_N$$

A continuación se obtienen las potencias activa y reactiva que absorbe la carga en función de R y de $X = L\omega$. Para ello, en primer lugar se calcula la intensidad por una de las fases de la carga, por ejemplo la R:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN}}{R + j \cdot X}$$

De esta forma:

$$P = 3 \cdot R \cdot I_R^2 = \frac{3 \cdot U_{RN}^2 \cdot R}{R^2 + X^2} \;\; ; \;\; Q = 3 \cdot X \cdot I_R^2 = \frac{3 \cdot U_{RN}^2 \cdot X}{R^2 + X^2}$$

Por tanto:

$$Q_C = 3 \cdot U_{RN}^2 \cdot \left[\frac{X}{R^2 + X^2} - \frac{R}{R^2 + X^2} \cdot \tan \varphi_N \right]$$

En la Figura 64 se ha representado la variación de P, Q y Q_C con respecto a X.

Si $\cos \varphi_N$ ha de ser mayor de $0{,}95$, habrá que estudiar la variación de Q_C cuando varía X ($X = L\omega$). En particular se calculará el máximo que alcanza Q_C en el intervalo de variación de X. Para ello no hay más que calcular la derivada de la expresión de Q_C con respecto a X e igualar a cero:

$$\frac{dQ_C}{dX} = 3 \cdot U_{RN}^2 \cdot \left[\frac{R^2 - X^2}{(R^2 + X^2)^2} + \frac{2 \cdot X \cdot R \cdot \tan \varphi_N}{(R^2 + X^2)^2} \right] = 0 \implies$$

$$X^2 - 2 \cdot X \cdot R \cdot \tan \varphi_N - R^2 = 0$$

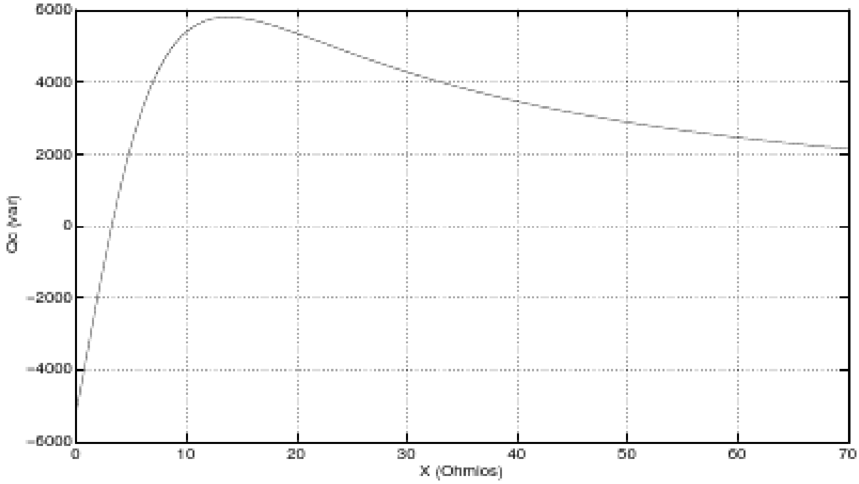


Figura 64

Sustituyendo valores

$$X^2 - 6{,}57 \cdot X - 100 = 0$$

y resolviendo resulta:

$$X = 10 \cdot \tan \varphi_N \pm 10 \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_N} \approx 3{,}29 \pm 10{,}53$$

Como $X \geq 0$ implica que la solución es

$$X \approx 13{,}81\,\Omega$$

Para este valor de la inductancia, la potencia reactiva que debe suministrar la batería de condensadores es:

$$Q_C = 3 \cdot \left(400/\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left[\frac{13{,}81}{10^2 + 13{,}81^2} - \frac{10}{10^2 + 13{,}81^2} \cdot \tan(18{,}19^\circ)\right] \approx 5\,792\,\text{var}$$

Una vez obtenida la potencia reactiva máxima que ha de suministrar la batería de condensadores, la capacidad total de esta es:

$$C = \frac{Q_C}{3 \cdot 2\pi \cdot f \cdot (U_{RN}/\sqrt{3})^2} = \frac{5\,792}{3 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot (400/\sqrt{3})^2} \approx 1{,}15 \cdot 10^{-4}\,\text{F}$$

Como se dispone de condensadores de $3\,\mu$F, se puede comprobar que es necesario instalar 39 en paralelo en cada una de las tres fases.

PROBLEMA 31

El sistema trifásico equilibrado de la Figura 65 se encuentra alimentado de una red de 400 V. Se sabe que R=$10\,\Omega$ y que L puede adoptar cualquier valor comprendido entre 0 y $0{,}2$ H. Se pide obtener:

1. El valor de L que hace máximo el consumo de potencia reactiva.

2. La capacidad de la batería de condensadores que será necesario instalar para asegurar que el factor de potencia del conjunto sea la unidad en las condiciones del apartado anterior.

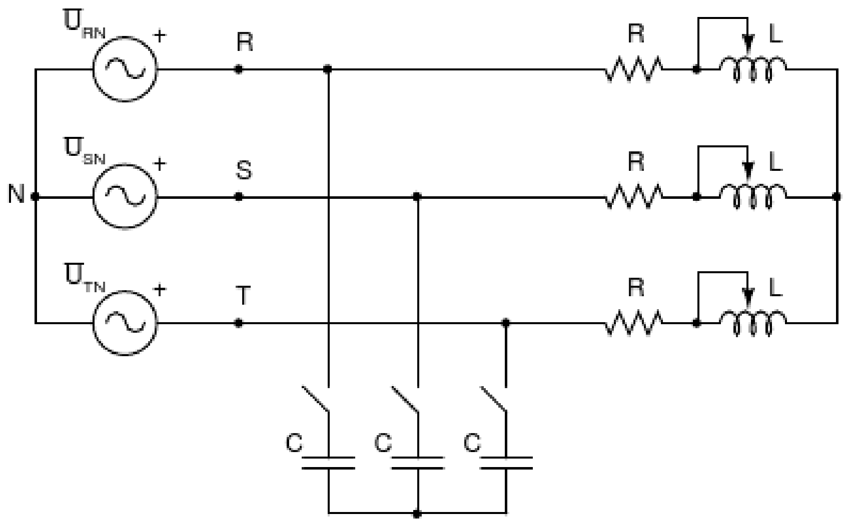


Figura 65

SOLUCIÓN 31

1. En primer lugar se obtendrá la potencia reactiva que absorbe la carga en función de X=$L\omega$. Para ello se calcula la intensidad por una de las fases de la carga, por ejemplo la R:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN}}{R + j \cdot X}$$

De esta forma:

$$Q = 3 \cdot X \cdot I_R^2 = \frac{3 \cdot U_{RN}^2 \cdot X}{R^2 + X^2}$$

Para obtener el máximo consumo de potencia reactiva en el intervalo de variación de X, no hay más que efectuar la derivada de la expresión de Q con respecto a X e igualar a cero:

$$\frac{dQ}{dX} = 3 \cdot U_{RN}^2 \cdot \frac{R^2 - X^2}{(R^2 + X^2)^2} = 0 \implies X = R = 10\,\Omega$$

De esta forma el valor de L que hace máximo el consumo de potencia reactiva es el siguiente:

$$L = \frac{X}{2\pi \cdot f} = \frac{10}{2\pi \cdot 50} \approx 0{,}032\,\mathrm{H}$$

2. Para determinar la capacidad mínima que ha de tener la batería de condensadores para asegurar que el factor de potencia de la instalación sea 1, es necesario saber el valor de la inductancia que hace máxima la potencia reactiva absorbida por la carga. Esta inductancia es la que se ha calculado en el apartado anterior, para la cual el consumo de potencia reactiva es

$$Q = 3 \cdot \left(400/\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{10}{10^2 + 10^2} = 8\,000\,\mathrm{var}$$

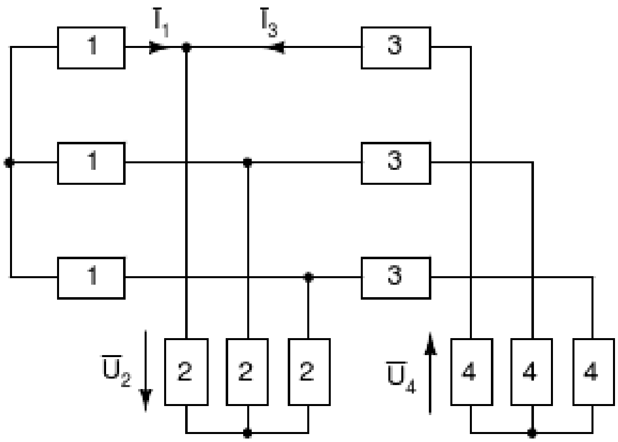
Una vez obtenida la potencia reactiva máxima que debe suministrar la batería de condensadores, su capacidad es:

$$C = \frac{Q}{3 \cdot 2\pi \cdot f \cdot (U_{RN}/\sqrt{3})^2} = \frac{8\,000}{3 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot (400/\sqrt{3})^2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}$$

PROBLEMA 32

En la Figura 66 se representa un circuito trifásico equilibrado cuyos elementos son desconocidos, así como el diagrama fasorial correspondiente a las tensiones e intensidades representadas en dicho circuito.

Para cada uno de los elementos se pide indicar su carácter generador o receptor. Así mismo, para cada generador indicar razonadamente si genera o consume potencia reactiva, y para receptor si tiene carácter inductivo o capacitivo.



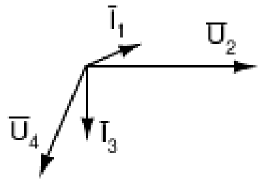


Figura 66

Solución 32

Según se observa en la Figura 66, todas las tensiones e intensidades representadas en el circuito corresponden a la fase *R* del sistema trifásico. Esto permite usar un circuito equivalente monofásico como el mostrado en la Figura 67 de forma que se facilite el análisis.

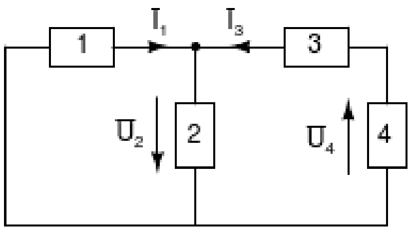


Figura 67

A continuación se analiza cada uno de los elementos siguiendo el criterio de referencia pasivo, el cual supone escoger la caída de tensión y la intensidad en el mismo sentido.

Elemento 1

A partir de la Figura 67 se ha obtenido la Figura 68 en la que se ha representado el Elemento 1 de forma aislada con las referencias de tensión e intensidad siguiendo el criterio de referencia pasivo. Así mismo, en la misma figura se ha

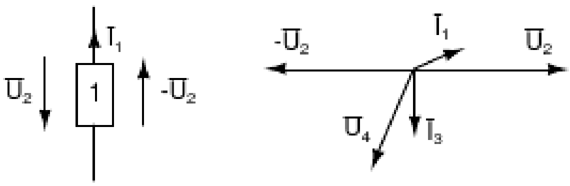


Figura 68

representado el diagrama fasorial correspondiente a la tensión e intensidad del Elemento 1.

Según el diagrama fasorial de la Figura 68, el desfase entre la tensión $-\overline{U}_2$ y la intensidad $\overline{I}_1$ es mayor de 90° y por tanto el Elemento 1 es un generador, es decir suministra potencia activa.

En estos casos, en los que el desfase entre tensión e intensidad es mayor de 90°, el análisis de la potencia reactiva resulta más cómodo realizarlo considerando el comportamiento del resto del circuito y mediante la aplicación del teorema de Boucherot concluir que el elemento en cuestión debe hacer lo contrario que el resto del circuito. Así por ejemplo, si ahora se analiza la tensión $\overline{U}_2$ y la intensidad $\overline{I}_1$ en el diagrama fasorial de la Figura 68 se puede observar que, como la intensidad adelanta a la tensión, el resto del circuito se comporta como una carga capacitiva y por tanto el Elemento 1 debe absorber potencia reactiva, es decir justo lo contrarío de lo que hace el resto del circuito.

En resumen, el Elemento 1 es un generador subexcitado, es decir, se encuentra absorbiendo potencia reactiva.

Elemento 2

Según el circuito de la Figura 67, del Elemento 2 solo se conoce *a priori* su tensión. La intensidad se calcula aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades

$$\overline{I}_2 = \overline{I}_1 + \overline{I}_3$$

En la Figura 69 se ha representado el Elemento 2 de forma aislada con las referencias de tensión e intensidad siguiendo el criterio de referencia pasivo. Así mismo, en la misma figura se ha representado el diagrama fasorial correspondiente a la tensión e intensidad del Elemento 2.

Según el diagrama fasorial de la Figura 69, el desfase entre la tensión $\overline{U}_2$ y la intensidad $\overline{I}_2$ es menor de 90° y por tanto el Elemento 2 es un receptor, es decir absorbe potencia activa. Además, como la intensidad retrasa a la tensión el Elemento 2 tiene carácter inductivo.

En resumen, el Elemento 2 es un receptor de carácter inductivo.

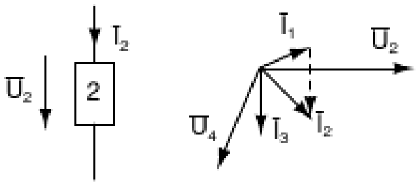


Figura 69

Elemento 3

Según el circuito de la Figura 67, del Elemento 3 solo se conoce *a priori* su intensidad. La tensión se calcula aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones

$$\overline{U}_3 = -\left(\overline{U}_2 + \overline{U}_4\right)$$

En la Figura 70 se ha representado el Elemento 3 de forma aislada con las referencias de tensión e intensidad siguiendo el criterio de referencia pasivo. Así mismo, en la misma figura se ha representado el diagrama fasorial correspondiente a la tensión e intensidad del elemento 3.

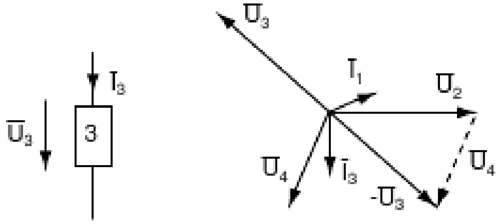


Figura 70

Según el diagrama fasorial de la Figura 70, el desfase entre la tensión $\overline{U}_3$ y la intensidad $\overline{I}_3$ es mayor de $90°$ y por tanto el Elemento 3 es un generador, es decir suministra potencia activa. Para analizar si el Elemento 3 absorbe o cede potencia reactiva se seguirá el mismo proceso que el indicado para el Elemento 1. Así, el resto del circuito se comporta como una carga inductiva ya que la intensidad $\overline{I}_3$ se encuentra en retraso con respecto a la tensión $-\overline{U}_3$. Esto implica que el Elemento 3 tiene que ceder potencia reactiva.

En resumen, el Elemento 3 es un generador sobreexcitado, es decir, se encuentra cediendo potencia reactiva.

Elemento 4

En la Figura 71 se ha representado el Elemento 4 de forma aislada con las referencias de tensión e intensidad siguiendo el criterio de referencia pasivo. Así mismo, en la misma figura se ha representado el diagrama fasorial correspondiente a la tensión e intensidad del elemento 4.

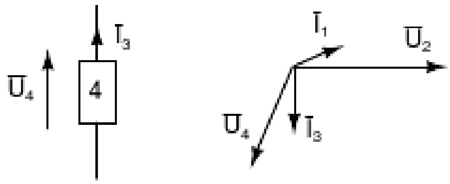


Figura 71

Según el diagrama fasorial de la Figura 71 el desfase entre la tensión $\overline{U}_4$ y la intensidad $\overline{I}_3$ es menor de 90° y por tanto el Elemento 4 es un receptor, es decir absorbe potencia activa. Además, como la intensidad adelanta a la tensión, el Elemento 4 tiene carácter capacitivo.

En resumen, el Elemento 4 es un receptor de carácter capacitivo.

PROBLEMA 33

En el circuito trifásico de la Figura 72 se conocen las tensiones de las fuentes de alimentación: $\overline{U}_{RS}$=400∠0° V, $\overline{U}_{ST}$=400∠ − 120° V y $\overline{U}_{TR}$=400∠120° V. Se pide:

1. Con K cerrado y sabiendo que $\overline{Z}$=40∠30° Ω, calcular la lectura del amperímetro.
2. Con K abierto, calcular el valor de $\overline{Z}$ para que la lectura del amperímetro sea la misma que la del apartado anterior.

Solución 33

1. Con K cerrado, el sistema trifásico está equilibrado, verificándose lo siguiente (Figura 73):

$$\overline{I}'_{TS} = \overline{I}_{ST}$$

Como

$$\overline{I}_{ST} = \frac{\overline{U}_{ST}}{\overline{Z}} = \frac{400\angle-120^\circ}{40\angle30^\circ} = 10\angle-150^\circ \text{ V}$$

entonces la lectura del amperímetro es de 10 A.

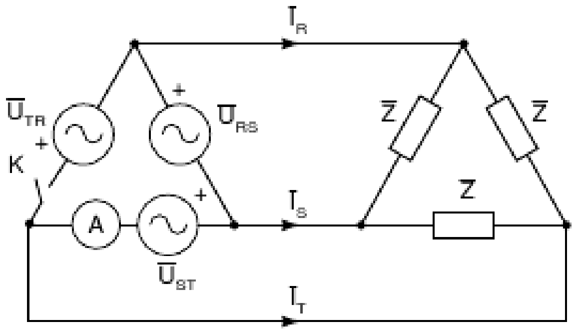


Figura 72

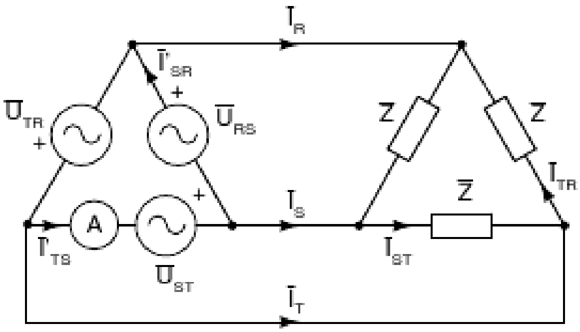


Figura 73

2. Con K abierto el circuito trifásico queda según se muestra en la Figura 74.

En esta situación el amperímetro está midiendo la intensidad de línea I_T. Según la Figura 74

$$\overline{I}_T = \overline{I}_{ST} - \overline{I}_{TR} = \frac{\overline{U}_{ST}}{\overline{Z}'} - \frac{\overline{U}_{TR}}{\overline{Z}'}$$
$$= \frac{400\angle -120^\circ}{\overline{Z}'} - \frac{400\angle 120^\circ}{\overline{Z}'} = \frac{400 \cdot \sqrt{3}\angle -90^\circ}{\overline{Z}'}$$

Si la lectura del amperímetro ha de ser la misma que en el apartado anterior, Z' tiene que tener el siguiente valor:

$$10 = \frac{400 \cdot \sqrt{3}}{Z'} \implies Z' = 40 \cdot \sqrt{3}\,\Omega$$

El carácter de la carga puede ser cualquiera ya que no influye en la lectura del amperímetro.

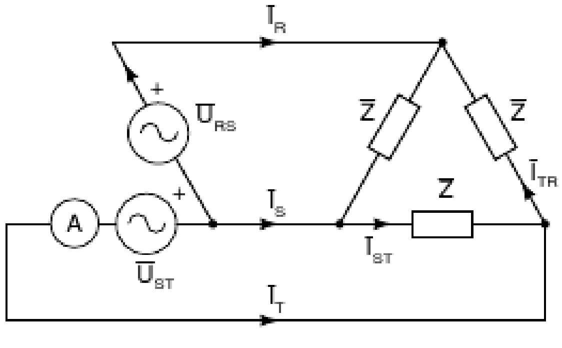


Figura 74

PROBLEMA 34

El circuito de la Figura 75 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado. Estando K_1 y K_2 cerrados, los vatímetros miden W_1=700 W y W_2=300 W. Determinar:

1. La potencia activa consumida por la carga trifásica si K_1 se abre y K_2 permanece cerrado.

2. Las lecturas de los vatímetros con K_1 y K_2 abiertos.

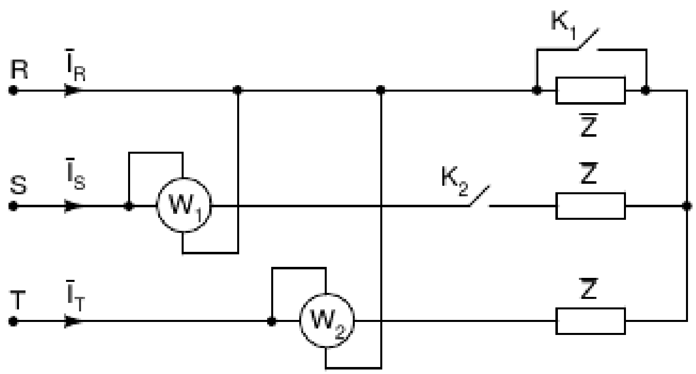


Figura 75

Solución 34

La potencia compleja de la carga trifásica es:

$$\overline{S} = \overline{U}_{RN}\overline{I}_R^* + \overline{U}_{SN}\overline{I}_S^* + \overline{U}_{TN}\overline{I}_T^*$$

Como el sistema es de 3 hilos, a partir de la ley de Kirchhoff de intensidades se tiene que

$$\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{I}_R^* + \overline{I}_S^* + \overline{I}_T^* = 0$$

lo cual permite expresar la intensidad $\overline{I}_R$ en función de las otras dos:

$$\overline{I}_R^* = -(\overline{I}_S^* + \overline{I}_T^*)$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\overline{S} &= -\overline{U}_{RN}(\overline{I}_S^* + \overline{I}_T^*) + \overline{U}_{SN}\overline{I}_S^* + \overline{U}_{TN}\overline{I}_T^* \\ &= (\overline{U}_{SN} - \overline{U}_{RN})\overline{I}_S^* + (\overline{U}_{TN} - \overline{U}_{RN})\overline{I}_T^* \\ &= \overline{U}_{SR}\overline{I}_S^* + \overline{U}_{TR}\overline{I}_T^*\end{aligned}$$

La potencia activa total es

$$\begin{aligned}P &= \Re e[S] = \Re e[\overline{U}_{SR}\overline{I}_S^* + \overline{U}_{TR}\overline{I}_T^*] \\ &= U_{SR}I_S\cos(\widehat{\overline{U}_{SR},\overline{I}_S}) + U_{TR}I_T\cos(\widehat{\overline{U}_{TR},\overline{I}_T})\end{aligned}$$

que coincide con la suma de las lecturas de los dos vatímetros, es decir:

$$P = W_1 + W_2$$

Con los interruptores cerrados, el circuito que resulta se muestra en la Figura 76.

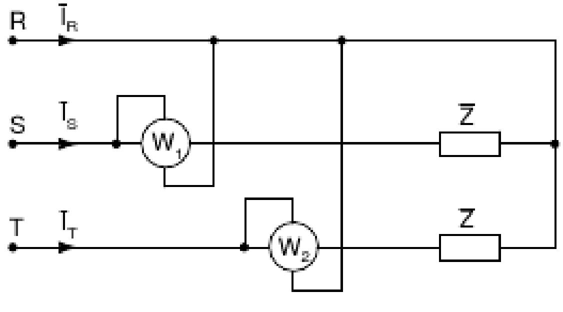


Figura 76

En esta situación es fácil comprobar que ambas cargas monofásicas están sometidas a la tensión de línea, de manera que la potencia activa que consumen es

$$P = 2 \cdot R_Z \cdot \left(\frac{U_L}{Z}\right)^2$$

Por otro lado:

$$P = W_1 + W_2 = 700 + 300 = 1\,000\,\mathrm{W}$$

De esta manera:

$$2 \cdot R_Z \cdot \left(\frac{U_L}{Z}\right)^2 = 1\,000$$

1. En la Figura 77 se muestra el circuito resultante cuando se abre K_1 y K_2 permanece cerrado.

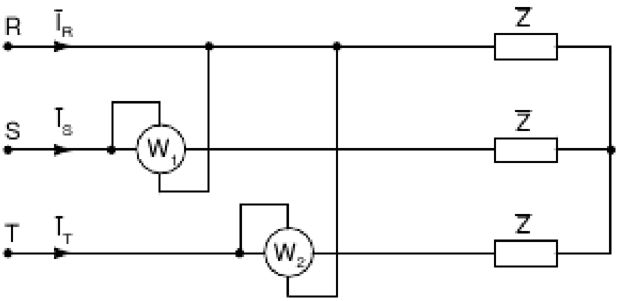


Figura 77

Esta situación corresponde a un sistema trifásico equilibrado, siendo la potencia activa consumida:

$$P = 3 \cdot R_Z \cdot \left(\frac{U_L/\sqrt{3}}{Z}\right)^2 = R_Z \cdot \left(\frac{U_L}{Z}\right)^2 = 500\,\mathrm{W}$$

2. Cuando ambos interruptores están abiertos, la lectura del vatímetro 1 es 0 ya que por la fase S no circula intensidad.

Por otro lado, la lectura del vatímetro 2 es:

$$W_2 = U_{TR} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TR}, \overline{I}_T})$$

La intensidad por la fase T es la siguiente:

$$\overline{I}_T = \frac{\overline{U}_{TR}}{2 \cdot \overline{Z}} = \frac{U_L\angle 120^\circ}{2 \cdot Z\angle\varphi} = \frac{U_L}{2 \cdot Z}\angle(120^\circ - \varphi)$$

De esta forma:

$$W_2 = U_L \cdot \frac{U_L}{2 \cdot Z} \cdot \cos\varphi = \frac{U_L^2}{2 \cdot Z^2} \cdot R_Z = 250\,\mathrm{W}$$

PROBLEMA 35

El circuito de la Figura 78 se encuentra alimentado por un sistema de tensiones equilibrado y de secuencia directa. Estando K_1 y K_2 cerrados entonces $W_1 + W_2$=1 000 W. Determinar:

1. Las lecturas de los vatímetros con K_1 abierto y K_2 cerrado.
2. La potencia activa consumida por la carga trifásica si K_2 se abre y K_1 permanece cerrado.
3. La potencia activa consumida por la carga trifásica si K_2 y K_1 se abren.

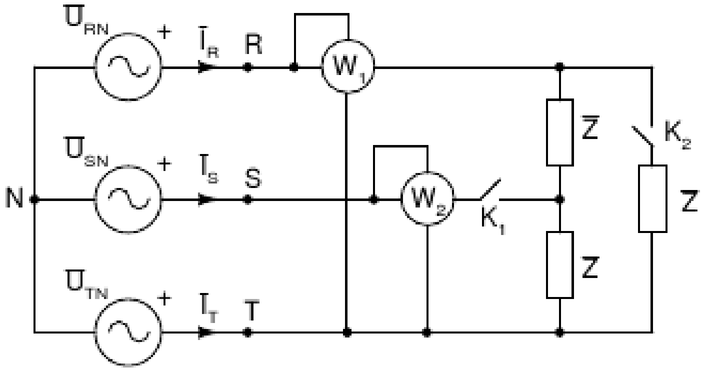


Figura 78

SOLUCIÓN 35

Según se observa en la Figura 78 la disposición de los vatímetros se corresponde con el método de Aron. Así:

$$W_1 + W_2 = 1\,000 = P$$

Con K_1 y K_2 cerrados el sistema trifásico resultante se encuentra equilibrado, de forma que la potencia activa es la siguiente:

$$P = 1\,000 = 3 \cdot \left(\frac{U_L}{Z}\right)^2 \cdot Z \cdot \cos\varphi = 3 \cdot \frac{U_L^2}{Z} \cdot \cos\varphi$$

1. Con K_1 abierto y K_2 cerrado el circuito resultante se muestra en la Figura 79.

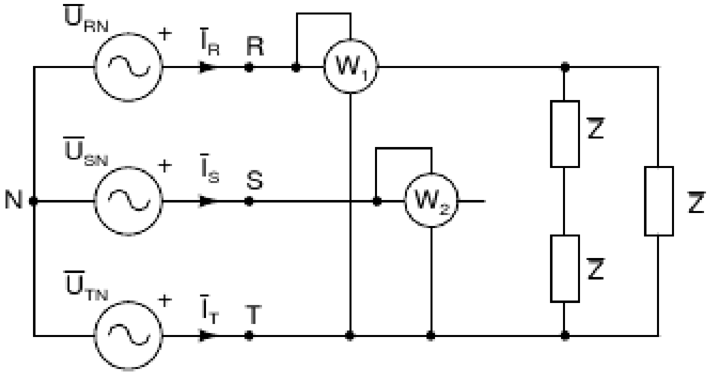


Figura 79

Es fácil comprobar que en esta caso la lectura del vatímetro 2 es cero ya que no circula intensidad por su circuito amperimétrico. Por otra parte, según la Figura 79 el vatímetro 1 se encuentra midiendo la potencia activa de la carga Z_{eq}, donde

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{2}{3} \cdot \overline{Z}$$

Por tanto:

$$W_1 = \left(\frac{U_L}{\frac{2}{3} \cdot Z}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot Z \cdot \cos\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{U_L^2}{Z} \cdot \cos\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{1\,000}{3} = 500\,\mathrm{W}$$

2. En la Figura 80 se muestra el circuito resultante cuando se abre K_2 y K_1 permanece cerrado. En este caso la potencia activa consumida por la carga trifásica se calcula de la siguiente forma:

$$P = 2 \cdot \left(\frac{U_L}{Z}\right)^2 \cdot Z \cdot \cos\varphi = 2 \cdot \frac{U_L^2}{Z} \cdot \cos\varphi = 2 \cdot \frac{1\,000}{3} \approx 666{,}67\,\mathrm{W}$$

3. Si K_1 y K_2 se abren entonces el circuito resultante se muestra en la Figura 81.

En este caso la potencia activa consumida por la carga es:

$$P = \left(\frac{U_L}{2 \cdot Z}\right)^2 \cdot 2 \cdot Z \cdot \cos\varphi = \frac{U_L^2}{2 \cdot Z} \cdot \cos\varphi = \frac{1\,000}{2 \cdot 3} \approx 166{,}67\,\mathrm{W}$$

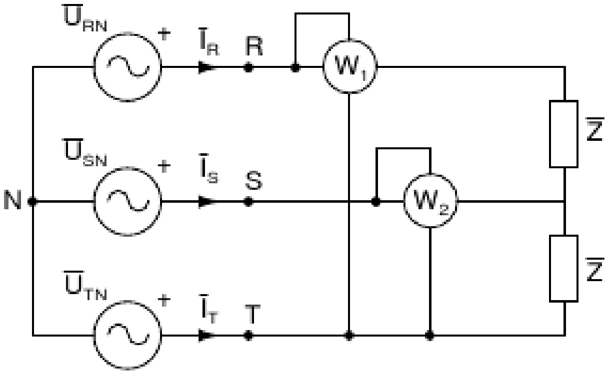


Figura 80

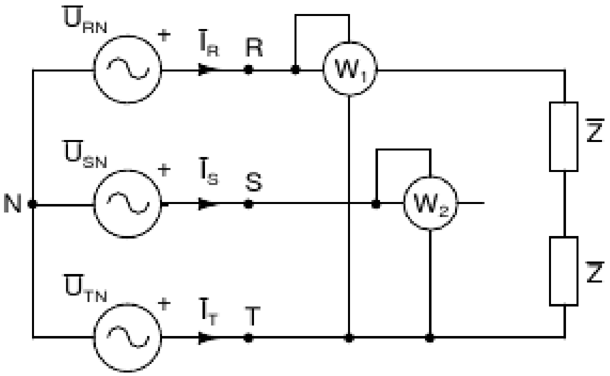


Figura 81

PROBLEMA 36

El circuito de la Figura 82 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones equilibrado y de secuencia directa. Sabiendo que $\overline{Z}_R$=10$\angle$0° Ω, $\overline{Z}_S$=10$\angle$45° Ω, $\overline{Z}_T$=10$\angle$90° Ω, y que, con K abierto, las lecturas de los vatímetros son W_1=7 967 W y W_2=3 300 W, se pide:

1. Con K abierto, calcular la potencia activa absorbida por la carga trifásica.

2. La lectura del voltímetro 1.

3. Con K cerrado, calcular la potencia activa absorbida por la carga.

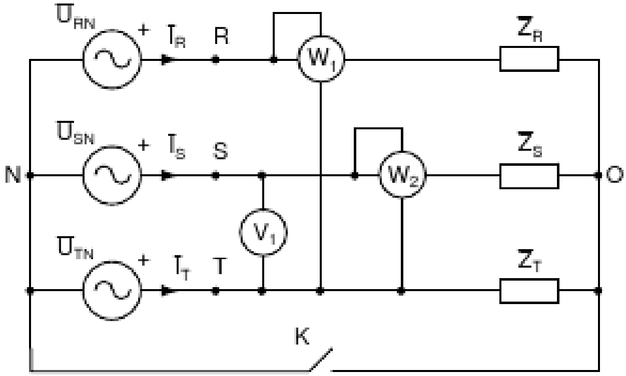


Figura 82

Solución 36

1. Según la Figura 82, la potencia compleja del receptor trifásico es:

$$\overline{S} = \overline{U}_{RO} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{U}_{SO} \cdot \overline{I}_S^* + \overline{U}_{TO} \cdot \overline{I}_T^*$$

Si el interruptor K está abierto, el sistema es a tres hilos y se tiene que:

$$\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0 \;\Rightarrow\; \overline{I}_R^* + \overline{I}_S^* + \overline{I}_T^* = 0 \;\Rightarrow\; \overline{I}_T^* = -(\overline{I}_R^* + \overline{I}_S^*)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \overline{U}_{RO} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{U}_{SO} \cdot \overline{I}_S^* - \overline{U}_{TO} \cdot (\overline{I}_R^* + \overline{I}_S^*)\\ &= (\overline{U}_{RO} - \overline{U}_{TO}) \cdot \overline{I}_R^* + (\overline{U}_{SO} - \overline{U}_{TO}) \cdot \overline{I}_S^*\\ &= \overline{U}_{RT} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{U}_{ST} \cdot \overline{I}_S^*\end{aligned}$$

De esta forma, la potencia activa total es

$$\begin{aligned}P &= \Re e[\overline{S}] = U_{RT} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TR}, \overline{I}_R}) + U_{ST} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{ST}, \overline{I}_S})\\ &= W_1 + W_2\end{aligned}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$P = W_1 + W_2 = 7\,967 + 3\,300 = 11\,267\,\mathrm{W}$$

Hay que destacar que como el sistema está desequilibrado no se puede ob-

2. Según se muestra en la Figura 82, el voltímetro 1 está midiendo la tensión de línea del sistema trifásico. Para hallar dicha tensión, se calculará en primer lugar la potencia activa que consume cada una de las cargas monofásicas en función de dicha tensión cuando K está abierto. En segundo lugar se igualará dicha potencia con la ya calculada en el apartado anterior. Para ello, la forma más fácil de proceder es obtener la tensión entre los neutros O y N cuando K está abierto:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_R} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_S} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_T}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_R} + \dfrac{1}{\overline{Z}_S} + \dfrac{1}{\overline{Z}_T}}$$

$$= \frac{\dfrac{U/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{10\angle 0^\circ} + \dfrac{U/\sqrt{3}\angle -120^\circ}{10\angle 45^\circ} + \dfrac{U/\sqrt{3}\angle 120^\circ}{10\angle 90^\circ}}{\dfrac{1}{10\angle 0^\circ} + \dfrac{1}{10\angle 45^\circ} + \dfrac{1}{10\angle 90^\circ}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{3}} \left(\frac{1\angle 0^\circ + 1\angle -165^\circ + 1\angle 30^\circ}{1\angle 0^\circ + 1\angle -45^\circ + 1\angle -90^\circ} \right) \approx U \cdot 0{,}22\angle 60^\circ \text{ V}$$

Una vez calculada la tensión $\overline{U}_{ON}$, la intensidad que circula por cada una de las impedancias es la siguiente:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RO}}{\overline{Z}_R} = \frac{\overline{U}_{RN} - \overline{U}_{ON}}{\overline{Z}_R}$$
$$= \frac{U/\sqrt{3}\angle 0^\circ - U \cdot 0{,}22\angle 60^\circ}{10\angle 0^\circ} \approx U \cdot 0{,}05\angle -22{,}18^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}_S = \frac{\overline{U}_{SO}}{\overline{Z}_S} = \frac{\overline{U}_{SN} - \overline{U}_{ON}}{\overline{Z}_S}$$
$$= \frac{U/\sqrt{3}\angle -120^\circ - U \cdot 0{,}22\angle 60^\circ}{10\angle 45^\circ} \approx U \cdot 0{,}08\angle -165^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}_T = \frac{\overline{U}_{TO}}{\overline{Z}_T} = \frac{\overline{U}_{TN} - \overline{U}_{ON}}{\overline{Z}_T}$$
$$= \frac{U/\sqrt{3}\angle 120^\circ - U \cdot 0{,}22\angle 60^\circ}{} \approx U \cdot 0{,}05\angle 52{,}18^\circ \text{ A}$$

Teniendo en cuenta que la impedancia de la fase T es una bobina pura y por tanto no intercambia potencia activa con el sistema, entonces:

$$\begin{aligned} P &= Z_R \cdot \cos\varphi_R \cdot I_R^2 + Z_S \cdot \cos\varphi_S \cdot I_S^2 \\ &= 10 \cdot \cos 0^\circ \cdot (U \cdot 0{,}05)^2 + 10 \cdot \cos 45^\circ \cdot (U \cdot 0{,}08)^2 \approx U^2 \cdot 0{,}07\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Igualando este valor con el obtenido en el apartado 1 resulta:

$$U^2 \cdot 0{,}07 = 11\,267 \quad \Rightarrow \quad U \approx 401{,}2\,\mathrm{V}$$

Por tanto la lectura del voltímetro 1 es de $401{,}2$ V.

Otra forma alternativa de resolver el problema es convirtiendo la carga a triángulo y calculando nuevamente la potencia consumida por cada una de las impedancias monofásicas. Con este método se evita el obtener la tensión $\overline{U}_{ON}$ aunque son necesarias las operaciones para la conversión de la carga desequilibrada de estrella a triángulo.

3. Con K cerrado resulta un sistema trifásico con neutro rígido, de forma que la tensión a la que está sometida cada una de las cargas monofásicas es igual a la tensión de fase del generador. Por tanto:

$$\begin{aligned} P &= Z_R \cdot \cos\varphi_R \cdot I_R^2 + Z_S \cdot \cos\varphi_S \cdot I_S^2 \\ &= Z_R \cdot \cos\varphi_R \cdot \left(\frac{U_{RN}}{Z_R}\right)^2 + Z_S \cdot \cos\varphi_S \cdot \left(\frac{U_{SN}}{Z_S}\right)^2 \\ &= \frac{U_{RN}^2}{Z_R} \cdot \cos\varphi_R + \frac{U_{SN}^2}{Z_S} \cdot \cos\varphi_S \\ &= \frac{401{,}4^2}{3 \cdot 10} \cdot \cos 0^\circ + \frac{401{,}4^2}{3 \cdot 10} \cdot \cos 45^\circ \approx 9\,159{,}27\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Hay que hacer notar que en este caso no se puede aplicar el método de Aron ya que el sistema es a 4 hilos desequilibrado.

PROBLEMA 37

El circuito trifásico de la Figura 83 se encuentra alimentado por un sistema trifásico, equilibrado, secuencia directa, de 380 V. Sabiendo que W_1=1 767,5 W y que todas las cargas están equilibradas y tienen carácter inductivo, obtener las lecturas del vatímetro 2 y del amperímetro. Tomar $\overline{U}_{RS}$ como origen de fases.

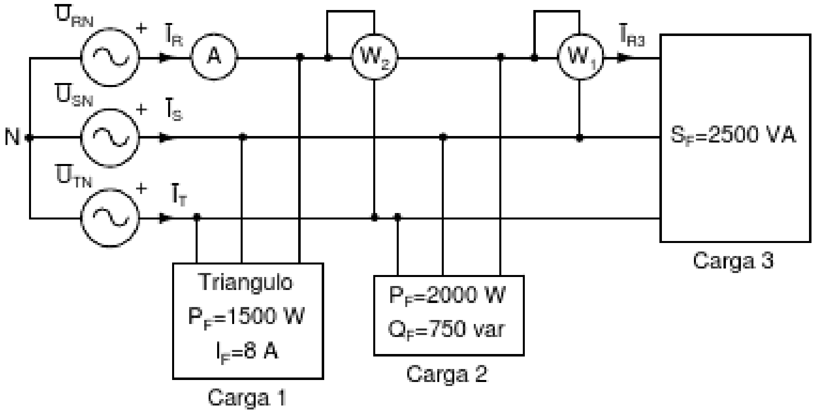


Figura 83

SOLUCIÓN 37

La resolución del problema se empezará analizando los datos correspondientes a la carga 3. En este sentido, se proporciona como dato la potencia aparente de una de las fases de dicha carga. A partir de este dato se puede calcular la intensidad de línea de la carga 3:

$$S_{F3} = 2\,500 = U_F \cdot I_{R3} = \frac{380}{\sqrt{3}} \cdot I_{R3} \quad \Rightarrow \quad I_{R3} \approx 11{,}39\,\mathrm{A}$$

Por otro lado, la lectura del vatímetro 1 es la siguiente:

$$W_1 = U_{RS} \cdot I_{R3} \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_{R3}})$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$\cos(\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_{R3}}) = \frac{W_1}{U_{RS} \cdot I_{R3}} = \frac{1\,767{,}5}{380 \cdot 11{,}39} \approx 0{,}408 \quad \Rightarrow \quad (\widehat{\overline{U}_{RS}, \overline{I}_{R3}}) \approx 65{,}9^\circ$$

Según la Figura 84:

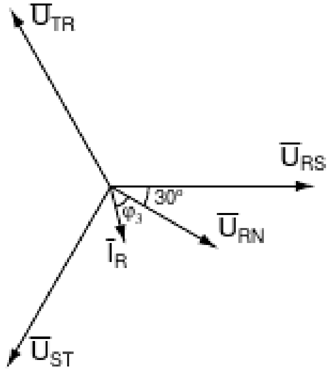


Figura 84

En consecuencia, el ángulo de la carga 3 es el siguiente:

$$\varphi_3 = 65{,}9^\circ - 30^\circ = 35{,}9^\circ$$

Conocida la potencia aparente y el ángulo de la carga 3, la potencia activa y reactiva absorbidas por dicha carga son las siguientes:

$$P_3 = 3 \cdot S_{F3} \cdot \cos\varphi_3 = 3 \cdot 2\,500 \cdot \cos(35{,}9^\circ) \approx 6\,075{,}31\,\mathrm{W}$$
$$Q_3 = 3 \cdot S_{F3} \cdot \sin\varphi_3 = 3 \cdot 2\,500 \cdot \sin(35{,}9^\circ) \approx 4\,397{,}79\,\mathrm{var}$$

Respecto a la carga 2, se proporciona la potencia activa y reactiva que consume una de las fases de dicha carga, a partir de las cuales se calcula las potencias trifásicas:

$$P_2 = 3 \cdot P_{F2} = 3 \cdot 2\,000 = 6\,000\,\mathrm{W}$$
$$Q_2 = 3 \cdot Q_{F2} = 3 \cdot 750 = 2\,250\,\mathrm{var}$$

Atendiendo a la Figura 83 se puede ver que el vatímetro 2 es uno de los dos vatímetros necesarios para el método de Aron. Si se supone que hay otro vatímetro ficticio (W_x) conectado según la Figura 85, entonces:

$$W_2 + W_x = P_2 + P_3$$
$$W_2 - W_x = \frac{Q_2 + Q_3}{\sqrt{3}}$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$W_2 = \frac{P_2 + P_3}{2} + \frac{Q_2 + Q_3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\,000 + 6\,075{,}31}{2} + \frac{2\,250 + 4\,397{,}79}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 7\,956{,}7\,\mathrm{W}$$

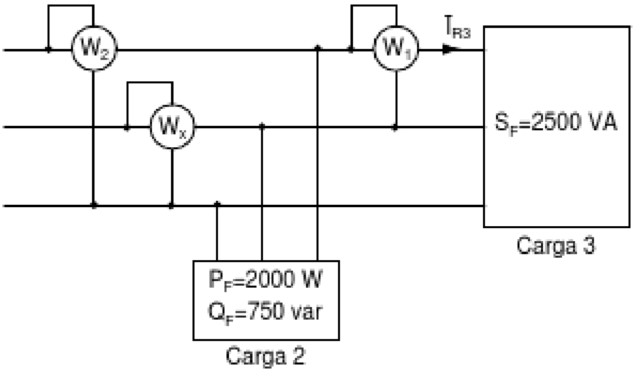


Figura 85

De la carga 1 se sabe el tipo de conexión (triángulo), la intensidad y la potencia de una fase. En primer lugar se calculará el ángulo de dicha carga:

$$P_{F1} = 1\,500 = 380 \cdot 8 \cdot \cos\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 \approx 60{,}43^\circ$$

Por tanto:

$$P_1 = 3 \cdot P_{F1} = 3 \cdot 1\,500 = 4\,500\,\mathrm{W}$$
$$Q_1 = P_1 \cdot \tan\varphi_1 = 4\,500 \cdot \tan(60{,}43^\circ) \approx 7\,932{,}49\,\mathrm{var}$$

Según el teorema de Boucherot, el generador tiene que proporcionar toda la potencia activa y reactiva que absorben las cargas:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 4\,500 + 6\,000 + 6\,075{,}31 = 16\,573{,}31\,\mathrm{W}$$
$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 7\,932{,}49 + 2\,250 + 4\,397{,}79 = 14\,580{,}28\,\mathrm{var}$$

Además:

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_R$$

Despejando y sustituyendo valores, se obtiene la lectura del amperímetro:

$$I_R = \frac{\sqrt{P_T^2 + Q_T^2}}{\sqrt{3} \cdot U_L} = \frac{\sqrt{16\,573{,}31^2 + 14\,580{,}28^2}}{\sqrt{3} \cdot 380} \approx 33{,}54\,\mathrm{A}$$

PROBLEMA 38

El circuito trifásico de la Figura 86 se encuentra alimentado por un sistema trifásico, equilibrado y de secuencia directa, de 400 V. Se sabe que $\overline{Z}_R$=10∠0° Ω, $\overline{Z}_S$=4∠45° Ω, $\overline{Z}_T$=100∠90° Ω y $\overline{Z}_N$=0,1∠0° Ω. Tomando $\overline{U}_{RN}$ como origen de

1. Con K_1 y K_2 cerrados, calcular $\overline{I}_R$, $\overline{I}_S$, $\overline{I}_T$, la lectura del amperímetro y la del voltímetro.

2. Con K_1 abierto, calcular la lectura del voltímetro y las tensiones de fase en la carga.

3. Con K_1 cerrado y K_2 abierto, calcular la lectura del voltímetro y las tensiones de fase en la carga.

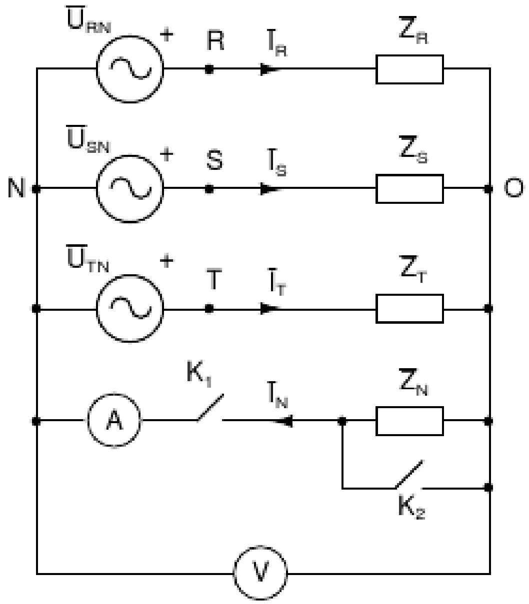


Figura 86

SOLUCIÓN 38

1. Con K_1 y K_2 cerrados, el sistema resultante es con neutro rígido y en consecuencia:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_R} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{10\angle 0^\circ} = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}_S = \frac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_S} = \frac{400/\sqrt{3}\angle -120^\circ}{4\angle 45^\circ} = \frac{100}{\sqrt{3}}\angle -165^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}_T = \frac{\overline{U}_{TN}}{} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 120^\circ}{} = \frac{4}{}$$

Por otro lado, la intensidad por el neutro se calcula aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades en el nudo O o en el N:

$$\overline{I}_N = \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ + \frac{100}{\sqrt{3}}\angle{-165^\circ} + \frac{4}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ \approx 33{,}63\angle{-155{,}79^\circ}\ \text{A}$$

De esta forma, la lectura del amperímetro es de $33{,}63$ A mientras que el voltímetro mide 0 V.

2. Con K_1 abierto, la tensión entre los neutros O y N se calcula aplicando el teorema de Millman:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_R} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_S} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_T}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_R} + \dfrac{1}{\overline{Z}_S} + \dfrac{1}{\overline{Z}_T}} = \frac{33{,}63\angle - 155{,}79^\circ}{\dfrac{1}{10\angle 0^\circ} + \dfrac{1}{4\angle 45^\circ} + \dfrac{1}{100\angle 90^\circ}}$$

$$\approx 100{,}71\angle - 121{,}78^\circ\ \text{V}$$

Por tanto, la lectura del voltímetro es de $100{,}71$ V.

Las tensiones de fase en la carga son las siguientes:

$$\overline{U}_{RO} = \overline{U}_{RN} - \overline{U}_{ON} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ - 100{,}71\angle - 121{,}78^\circ \approx 296{,}6\angle 16{,}67^\circ\ \text{V}$$

$$\overline{U}_{SO} = \overline{U}_{SN} - \overline{U}_{ON} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle - 120^\circ - 100{,}71\angle - 121{,}78^\circ$$

$$\approx 130{,}31\angle - 118{,}62^\circ\ \text{V}$$

$$\overline{U}_{TO} = \overline{U}_{TN} - \overline{U}_{ON} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 120^\circ - 100{,}71\angle - 121{,}78^\circ \approx 292{,}35\angle 102{,}33^\circ\ \text{V}$$

3. Con K_1 cerrado y K_2 abierto, la tensión entre los neutros O y N se calcula nuevamente aplicando el teorema de Millman:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_R} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_S} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_T}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_R} + \dfrac{1}{\overline{Z}_S} + \dfrac{1}{\overline{Z}_T} + \dfrac{1}{\overline{Z}_N}}$$

Se puede observar que la diferencia respecto al apartado anterior es que se

Sustituyendo valores resulta:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{33{,}63\angle -155{,}79^\circ}{\dfrac{1}{10\angle 0^\circ} + \dfrac{1}{4\angle 45^\circ} + \dfrac{1}{100\angle 90^\circ} + \dfrac{1}{0{,}1\angle 0^\circ}} \approx 3{,}27\angle -154{,}75^\circ \text{ V}$$

Por tanto, la lectura del voltímetro es de 3,27 V.

Las tensiones de fase en la carga son las siguientes:

$$\overline{U}_{RO} = \overline{U}_{RN} - \overline{U}_{ON} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ - 3{,}27\angle -154{,}75^\circ \approx 233{,}9\angle 0{,}34^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned}\overline{U}_{SO} &= \overline{U}_{SN} - \overline{U}_{ON} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle -120^\circ - 3{,}27\angle -154{,}75^\circ \\ &\approx 228{,}26\angle -119{,}53^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{U}_{TO} &= \overline{U}_{TN} - \overline{U}_{ON} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 120^\circ - 3{,}27\angle -154{,}75^\circ \\ &\approx 230{,}69\angle 119{,}19^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Es interesante comparar los resultados de los apartados 2 y 3. Cuanto mayor sea la impedancia del neutro mayor será la tensión entre los dos neutros. Así mismo, las tensiones de fase en la carga se aproximarán a las tensiones del generador cuando la impedancia de neutro sea pequeña.

PROBLEMA 39

El circuito trifásico de la Figura 87 se encuentra alimentado por un sistema trifásico, equilibrado y de secuencia directa, de 400 V. Las lecturas de los vatímetros son las siguientes: W_1=4 332 W, W_2=−6 065 W, W_3=3 000/$\sqrt{3}$ W, W_4=−199 W, W_5=199 W, W_6=0 W. Además se sabe que el amperímetro marca 15 A y que R=400 Ω. Teniendo en cuenta que las cargas 1 y 2 están equilibradas, calcular:

1. Potencia reactiva de la carga 1.
2. Potencia activa de la carga 1.
3. Potencia reactiva de la carga 2.
4. Potencia activa de la carga 2.
5. Potencia aparente del generador.

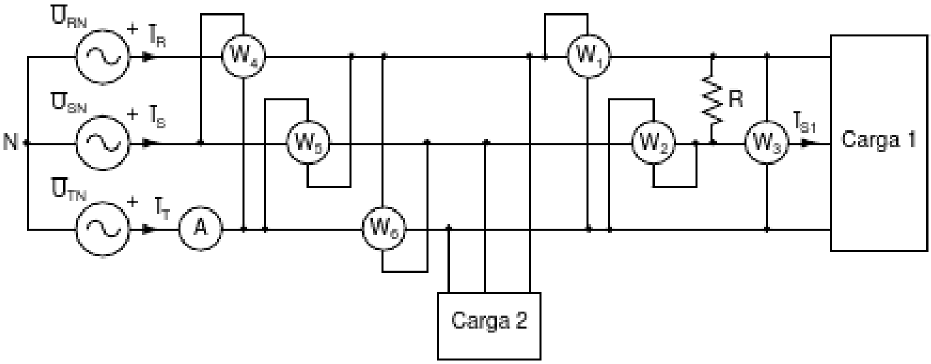


Figura 87

Solución 39

1. Según las Figuras 87 y 88, la lectura del vatímetro 3 es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
W_3 &= U_{RT} \cdot I_{S1} \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RT}, \overline{I}_{S1}}) = U_{RT} \cdot I_{S1} \cdot \cos(\varphi_1 + 90^\circ) \\
&= -U_{RT} \cdot I_{S1} \cdot \sin \varphi_1 = \frac{-Q_1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

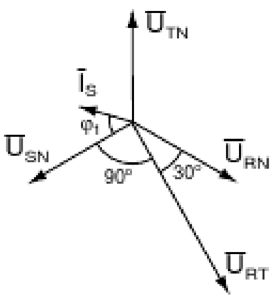


Figura 88

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$
Q_1 = -\sqrt{3} \cdot W_3 = -\sqrt{3} \cdot \frac{3\,000}{\sqrt{3}} = -3\,000\,\text{var}
$$

Como Q_1 es negativa significa que la carga 1 cede potencia reactiva, es decir,

2. En la Figura 87 se puede observar que la disposición de los vatímetros 1 y 2 corresponde a una configuración tipo Aron.

$$P_R + P_1 = W_1 - W_2$$

donde P_R es la potencia que consume la resistencia R. Además, en este caso no es posible utilizar los vatímetros para obtener la potencia reactiva ya que el sistema está desequilibrado.

La potencia que consume la resistencia es la siguiente:

$$P_R = \frac{U_{RS}^2}{R} = \frac{400^2}{400} = 400\,\mathrm{W}$$

Por tanto, la potencia activa de la carga 1 resulta:

$$P_1 = W_1 - W_2 - P_R = 4\,332 - (-6\,065) - 400 = 9\,997\,\mathrm{W}$$

3. Según la Figura 87 se puede comprobar que

$$W_4 + W_5 + W_6 = \sqrt{3} \cdot (Q_2 + Q_1)$$

Sustituyendo valores resulta:

$$W_4 + W_5 + W_6 = -199 + 199 + 0 = 0 = \sqrt{3} \cdot (Q_2 + Q_1) \quad \Rightarrow \quad Q_2 + Q_1 = 0$$

En consecuencia, la potencia reactiva de la carga 2 es la siguiente:

$$Q_2 = -Q_1 = 3\,000\,\mathrm{var}$$

Este resultado quiere decir que toda la potencia reactiva que cede la carga 1 la está absorbiendo la carga 2, y por tanto el generador ni absorbe ni cede potencia reactiva.

4. Si se analiza el circuito trifásico de la Figura 87 se puede ver que todas las cargas están conectadas en paralelo. Como tanto el sistema de alimentación como las cargas 1 y 2 están equilibrados entonces el sistema de intensidades que circulan por cada una de las cargas trifásicas formarán un sistema trifásico equilibrado. Sin embargo, debido a la intensidad que circula por la resistencia R el sistema de intensidades del generador está desequilibrado. De esta forma, los neutros de las cargas 1 y 2 y el neutro del generador estarán al mismo potencial pudiéndose plantear un circuito equivalente monofásico para la fase T que es la única que no está influenciada por la resistencia R.

Para la fase T se verifica:

$$S_T = \sqrt{\left(\frac{P_1 + P_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{Q_1 + Q_2}{3}\right)^2} = U_{TN} \cdot I_T$$

Sustituyendo valores y despejando se obtiene la potencia activa de la carga 2:

$$P_2 = 3 \cdot U_{TN} \cdot I_T - P_1 = 3 \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot 15 - 9\,997 \approx 395{,}3\,\mathrm{W}$$

5. La potencia compleja del generador es la siguiente:

$$\overline{S}_g = (P_1 + P_2 + P_R) + j \cdot (Q_1 + Q_2)$$

Como $Q_1 + Q_2 = 0$ entonces:

$$S_g = P_1 + P_2 + P_R = 9\,997 + 395{,}3 + 400 = 10\,792{,}3\,\mathrm{VA}$$

PROBLEMA 40

El circuito trifásico de la Figura 89 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones, equilibrado y de secuencia inversa, de $400\,\mathrm{V}$. Sabiendo que W_1=$3\,000/\sqrt{3}\,\mathrm{W}$, W_2=$1\,000\,\mathrm{W}$ y que el amperímetro marca $10\,\mathrm{A}$, calcular $\overline{Z}$ y R.

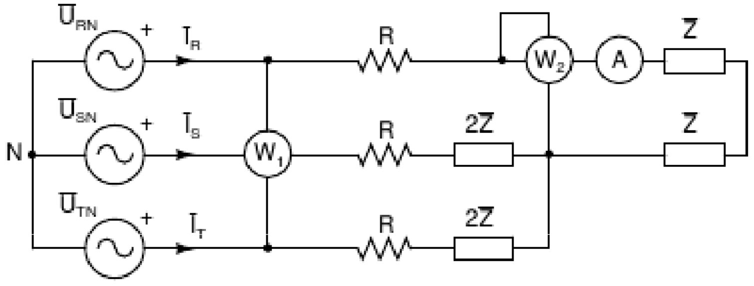


Figura 89

SOLUCIÓN 40

Tal y como se observa en la Figura 89 el sistema trifásico está equilibrado. Según el diagrama fasorial de la Figura 90 la lectura del vatímetro 1 es la siguiente:

$$W_1 = U_{RT} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RT}, \overline{I}_S}) = U_{RT} \cdot I_S \cdot \cos(90° - \varphi) = U_{RT} \cdot I_S \cdot \sin\varphi = \frac{Q_T}{\sqrt{3}}$$

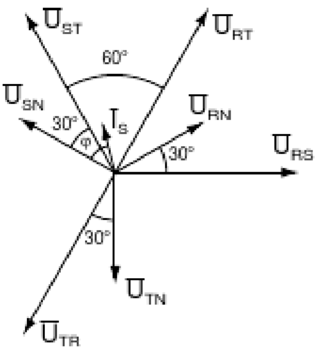


Figura 90

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$Q_T = \sqrt{3} \cdot W_1 = \sqrt{3} \cdot \frac{3\,000}{\sqrt{3}} = 3\,000\,\text{var}$$

Como Q_T es la potencia reactiva absorbida por la carga trifásica equilibrada $2\overline{Z}$ entonces:

$$Q_T = 3 \cdot 2 \cdot X_Z \cdot I_R^2$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$X_Z = \frac{Q_T}{3 \cdot 2 \cdot I_R^2} = \frac{3\,000}{3 \cdot 2 \cdot 10^2} = 5\,\Omega$$

Por otro lado, según se observa en la Figura 89, el vatímetro 2 mide la potencia activa de la carga monofásica $2\overline{Z}$:

$$W_2 = P_{2Z} = 2 \cdot R_Z \cdot I_R^2$$

Despejando y sustituyendo valores resulta:

$$R_Z = \frac{W_2}{2 \cdot I_R^2} = \frac{1\,000}{2 \cdot 10^2} = 5\,\Omega$$

De esta forma, la carga $\overline{Z}$ es la siguiuente:

$$\overline{Z} = R_Z + j \cdot X_Z = 5 + j \cdot 5\,\Omega$$

Como el sistema está equilibrado se puede plantear un circuito equivalente monofásico como el mostrado en la Figura 91 para la fase R.

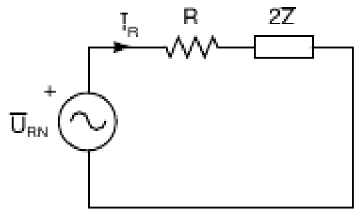


Figura 91

Según la Figura 91:

$$U_{RN} = \left|R + 2 \cdot \overline{Z}\right| \cdot I_R = \sqrt{\left(R + 2 \cdot R_Z\right)^2 + \left(2 \cdot X_Z\right)^2} \cdot I_R$$

Despejando y sustituyendo valores se obtiene el valor de R:

$$R = \sqrt{\left(\frac{U_{RN}}{I_R}\right)^2 - \left(2 \cdot X_Z\right)^2} - 2 \cdot R_Z$$

$$= \sqrt{\left(\frac{400/\sqrt{3}}{10}\right)^2 - \left(2 \cdot 5\right)^2} - 2 \cdot 5 \approx 10{,}82\,\Omega$$

PROBLEMA 41

El circuito trifásico de la Figura 92 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones, equilibrado y de secuencia directa. Las medidas obtenidas para dos condiciones de funcionamiento distintas (R_N=0 y R_N=∞) se muestran en la Tabla 1. Se pide calcular:

1. El valor de R_1, R_2 y R_3.

2. La lectura del amperímetro A_N, para las dos condiciones de funcionamiento.

3. La lectura del voltímetro V_N, para las dos condiciones de funcionamiento.

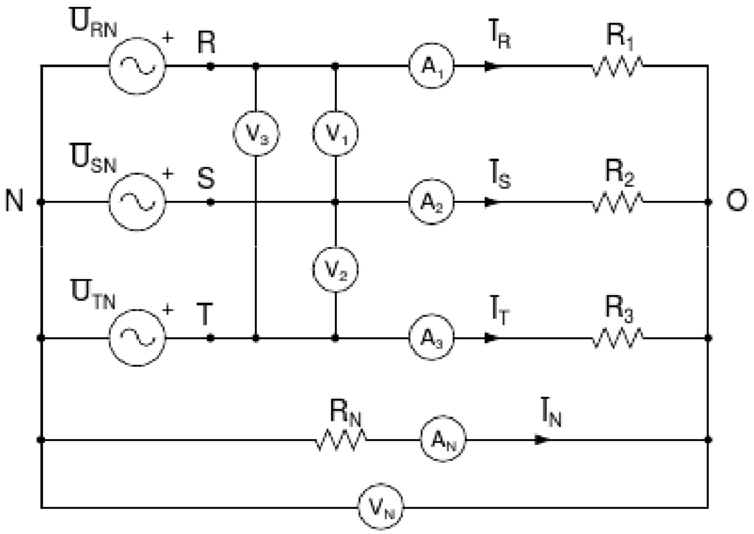


Figura 92

R_N (Ω)	U_1 (V)	U_2 (V)	U_3 (V)	I_1 (A)	I_2 (A)	I_3 (A)
0	220	220	220	0,2	0,5	0,5
∞	220	220	220	?	?	?

Tabla 1

Solución 41

1. La condición de funcionamiento en la que R_N=0 da lugar a un sistema trifásico con neutro rígido y por tanto la tensión aplicada a cada una de las resistencias es la tensión de fase del generador. De esta forma:

$$R_1 = \frac{U_{RN}}{I_R} = \frac{220/\sqrt{3}}{0{,}2} \approx 635\,\Omega$$
$$R_2 = \frac{U_{SN}}{I_S} = \frac{220/\sqrt{3}}{0{,}5} \approx 254\,\Omega$$
$$R_3 = \frac{U_{TN}}{I_T} = \frac{220/\sqrt{3}}{0{,}5} \approx 254\,\Omega$$

2. Si R_N=∞ entonces la lectura del amperímetro A_N es 0.

Si R_N=0, según los medidas correspondientes a esta condición de funcionamiento y teniendo en cuenta que la carga es resistiva pura entonces:

$$\overline{I}_R = 0{,}2\angle 0^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_S = 0{,}5\angle -120^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_T = 0{,}5\angle 120^\circ \text{ A}$$

Por otro lado, según la Figura 92, la intensidad por el neutro se calcula aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades en el nudo O o en el N:

$$-\overline{I}_N = \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0{,}2\angle 0^\circ + 0{,}5\angle -120^\circ + 0{,}5\angle 120^\circ \approx 0{,}3\angle 180^\circ \text{ A}$$

En consecuencia, la lectura del amperímetro A_N cuando R_N=0 es de $0{,}3$ A.

3. Si R_N=0 entonces la lectura del voltímetro es 0.

Si R_N=∞ la tensión entre el neutro O y N se calcula aplicando el teorema de Millman:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{R_1} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{R_2} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{0{,}3\angle 180^\circ}{\dfrac{1}{635} + \dfrac{1}{254} + \dfrac{1}{254}} \approx 31{,}75\angle 180^\circ$$

En consecuencia, la lectura del voltímetro cuando R_N=∞ es de $31{,}75$ V.

PROBLEMA 42

El circuito trifásico de la Figura 93 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones, equilibrado y de secuencia directa. Se sabe que la lectura del voltímetro es de 400 V, que $\overline{Z}_1$=$10\angle 45^\circ$ Ω y $\overline{Z}_2$=$10\angle -45^\circ$ Ω. Sabiendo que los vatímetros son iguales, calcular sus lecturas en los dos casos siguientes:

1. Con K cerrado.

2. Con K abierto.

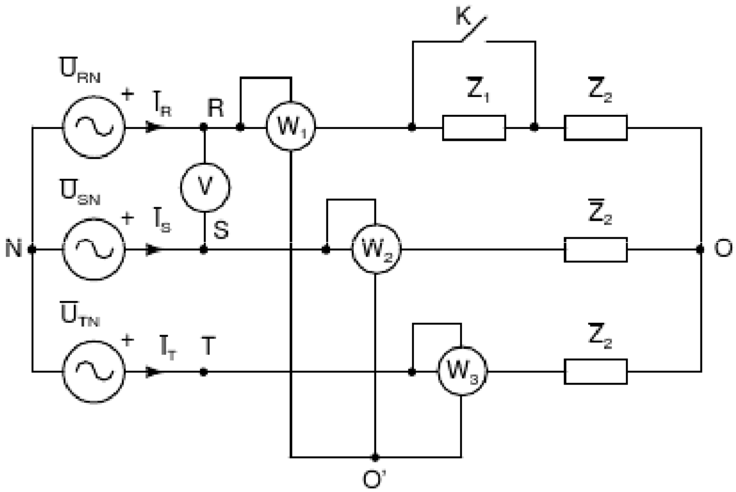


Figura 93

Solución 42

1. Con K cerrado, el sistema trifásico resultante está equilibrado y por tanto todos los neutros (O, O' y N) están al mismo potencial. En esta situación la lectura de los tres vatímetros es la misma. Eligiendo por ejemplo el vatímetro 1, según la Figura 93 su lectura es la siguiente:

$$W_1 = U_{RO'} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RO'}, \overline{I}_R}) = U_{RN} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RO}, \overline{I}_R})$$
$$= U_{RN} \cdot I_R \cdot \cos\varphi_2 = U_{RN} \cdot \frac{U_{RN}}{Z_2} \cdot \cos\varphi_2$$

Sustituyendo valores resulta:

$$W_1 = W_2 = W_3 = \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot \frac{400/\sqrt{3}}{10} \cdot \cos(-45^\circ) \approx 3\,771{,}24\,\mathrm{W}$$

2. Con K abierto, la carga está desequilibrada de forma que el potencial del neutro O no será el mismo que el de los neutros O' y N.

Según la Figura 93 la lectura de cada vatímetro es la siguiente:

$$W_1 = U_{RO'} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RO'}, \overline{I}_R})$$
$$W_2 = U_{SO'} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{SO'}, \overline{I}_S})$$
$$W_3 = U_{TO'} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TO'}, \overline{I}_T})$$

Como los tres vatímetros son iguales y el sistema de alimentación está equilibrado implica que los neutros O' y N están al potencial. Por tanto:

$$U_{RO'} = U_{RN} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ \text{ V}$$
$$U_{SO'} = U_{SN} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle -120^\circ \text{ V}$$
$$U_{TO'} = U_{TN} = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 120^\circ \text{ V}$$

Para el cálculo de las intensidades de línea ($\overline{I}_R, \overline{I}_S, \overline{I}_T$) se obtendrá en primer lugar la tensión $\overline{U}_{ON}$ aplicando el teorema de Millman:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{\dfrac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2} + \dfrac{\overline{U}_{SN}}{\overline{Z}_2} + \dfrac{\overline{U}_{TN}}{\overline{Z}_2}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2} + \dfrac{1}{\overline{Z}_2} + \dfrac{1}{\overline{Z}_2}}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$\overline{U}_{ON} = \frac{\dfrac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{10\angle 45^\circ + 10\angle -45^\circ} + \dfrac{400/\sqrt{3}\angle -120^\circ}{10\angle -45^\circ} + \dfrac{400/\sqrt{3}\angle 120^\circ}{10\angle -45^\circ}}{\dfrac{1}{10\angle 45^\circ + 10\angle -45^\circ} + \dfrac{1}{10\angle -45^\circ} + \dfrac{1}{10\angle -45^\circ}}$$

$$\approx 64{,}05\angle -123^\circ \text{ V}$$

A continuación se calculan las intensidades de línea:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RO}}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2} = \frac{\overline{U}_{RN}-\overline{U}_{ON}}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2}$$
$$= \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ - 64{,}05\angle -123^\circ}{10\angle 45^\circ + 10\angle -45^\circ} \approx 19{,}2\angle 11{,}42^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}_S = \frac{\overline{U}_{SO}}{\overline{Z}_2} = \frac{\overline{U}_{SN}-\overline{U}_{ON}}{\overline{Z}_2}$$
$$= \frac{400/\sqrt{3}\angle -120^\circ - 64{,}05\angle -123^\circ}{10\angle -45^\circ} \approx 16{,}7\angle -73{,}85^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned}\overline{I}_T &= \frac{\overline{U}_{TO}}{\overline{Z}_2} = \frac{\overline{U}_{TN} - \overline{U}_{ON}}{\overline{Z}_2} \\ &= \frac{400/\sqrt{3}\angle 120^\circ - 64{,}05\angle -123^\circ}{10\angle -45^\circ} \approx 26{,}6\angle 152{,}6^\circ\ \mathrm{A}\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}W_1 &= U_{RO'} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RO'}, \overline{I}_R}) \\ &= \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot 19{,}2 \cdot \cos(0^\circ - 11{,}42^\circ) = 4\,346{,}26\,\mathrm{W} \\ W_2 &= U_{SO'} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{SO'}, \overline{I}_S}) \\ &= \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot 16{,}7 \cdot \cos(-120^\circ + 73{,}84^\circ) = 2\,671{,}3\,\mathrm{W} \\ W_3 &= U_{TO'} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TO'}, \overline{I}_T}) \\ &= \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot 26{,}6 \cdot \cos(120^\circ - 152{,}6^\circ) = 5\,175{,}19\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

Resulta interesante comprobar que $W_1 \neq P_{\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z}_2}$, $W_2 \neq P_{\mathrm{Z}_2}$ y $W_3 \neq P_{\mathrm{Z}_2}$. Sin embargo se tiene que verificar que $W_1 + W_2 + W_3 = P_{\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z}_2} + P_{\mathrm{Z}_2} + P_{\mathrm{Z}_2}$. En realidad, la lectura de cada vatímetro se corresponde, respectivamente, con la potencia activa cedida por cada una de las ramas del generador trifásico.

PROBLEMA 43

El circuito trifásico de la Figura 94 se encuentra alimentado por un sistema trifásico y equilibrado de tensiones cuya frecuencia es 50 Hz. Se sabe que X_L=2 Ω y que las indicaciones de los amperímetros son: A_1=40 A, A_2=50 A, A_3=50 A. Calcular C para que el generador trabaje con un factor de potencia unidad.

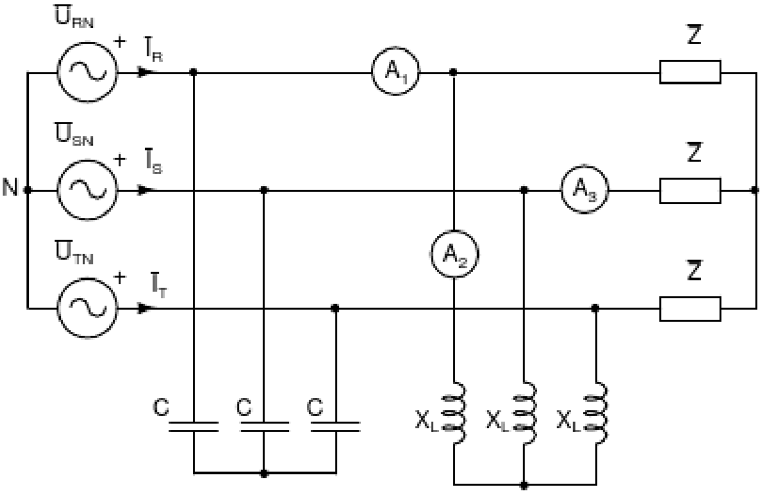


Figura 94

SOLUCIÓN 43

Como el circuito trifásico está equilibrado implica que todos los neutros están al mismo potencial. Así

$$U_{RN} = X_L \cdot I_2 = 2 \cdot 50 = 100\,\text{V} \quad \Rightarrow \quad U_L = \sqrt{3} \cdot 100\,\text{V}$$

La potencia aparente de la carga trifásica $\overline{Z}$ es la siguiente:

$$S_Z = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 100 \cdot 50 = 15\,000\,\text{VA}$$

La potencia reactiva de la carga trifásica X_L es la siguiente:

$$Q_{X_L} = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 100 \cdot 50 = 15\,000\,\text{var}$$

Por otro lado, la potencia aparente total correspondiente a la carga trifásica X_L más la carga trifásica $\overline{Z}$ es la siguiente:

$$S_T = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 100 \cdot 40 = 12\,000\,\text{VA}$$

Si se expresa cada potencia aparente en función de la correspondiente potencia activa y reactiva y se relacionan ambas resulta:

$$\left.\begin{array}{l} S_Z^2 = P_Z^2 + Q_Z^2 \\ S_T^2 = P_T^2 + Q_T^2 = P_Z^2 + \left(Q_{X_L} + Q_Z\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_Z^2 - Q_Z^2 = S_T^2 - \left(Q_{X_L} + Q_Z\right)^2$$

Despejando y sustituyendo valores se obtiene la potencia reactiva de la carga $\overline{Z}$:

$$Q_Z = \frac{S_T^2 - S_Z^2 - Q_{X_L}^2}{2 \cdot Q_{X_L}} = \frac{12\,000^2 - 15\,000^2 - 15\,000^2}{2 \cdot 15\,000} = -10\,200 \text{ var}$$

Se puede observar que la carga $\overline{Z}$ cede reactiva (tiene carácter capacitivo) mientras que la carga X_L necesariamente tiene que absorber reactiva ya que es una bobina. A continuación se calcula la potencia reactiva que debe suministrar el banco trifásico de condensadores:

$$Q_C = |Q_{X_L}| - |Q_Z| = 15\,000 - 10\,200 = 4\,800 \text{ var}$$

Por tanto, la capacidad de cada uno de los condensadores del banco es la siguiente:

$$C = \frac{Q_C}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U_L^2} = \frac{4\,800}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot (\sqrt{3} \cdot 100)^2} \approx 5{,}09 \cdot 10^{-4} \text{ F}$$

PROBLEMA 44

El circuito trifásico de la Figura 95 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones, equilibrado y de secuencia directa. Se sabe que la lectura del voltímetro es 400 V, $\overline{Z}_1$=$10\angle 45^\circ$ Ω y $\overline{Z}_2$=$50\angle 30^\circ$ Ω. Calcular la lectura del amperímetro en los siguientes casos:

1. K_1, K_2 y K_4 cerrados y K_3 abierto.

2. K_1 cerrado y el resto abiertos.

3. K_3 cerrado y el resto abiertos.

4. K_4 abierto y el resto cerrados.

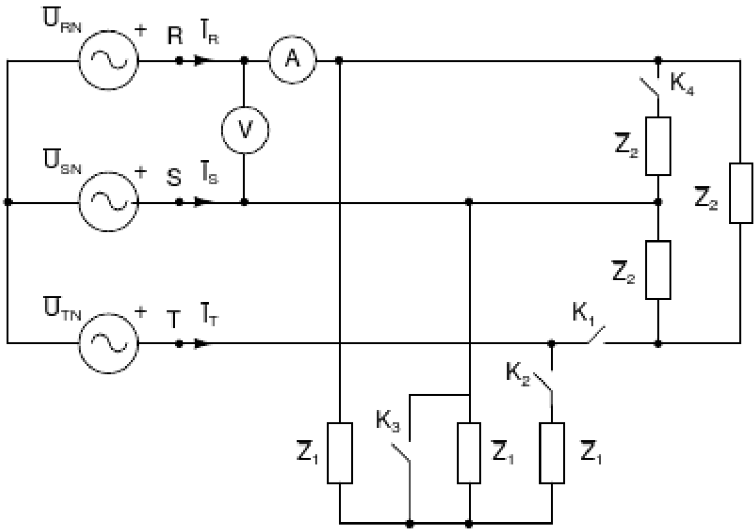


Figura 95

SOLUCIÓN 44

1. Con K_1, K_2 y K_4 cerrados y K_3 abierto el circuito resultante se muestra en la Figura 96.

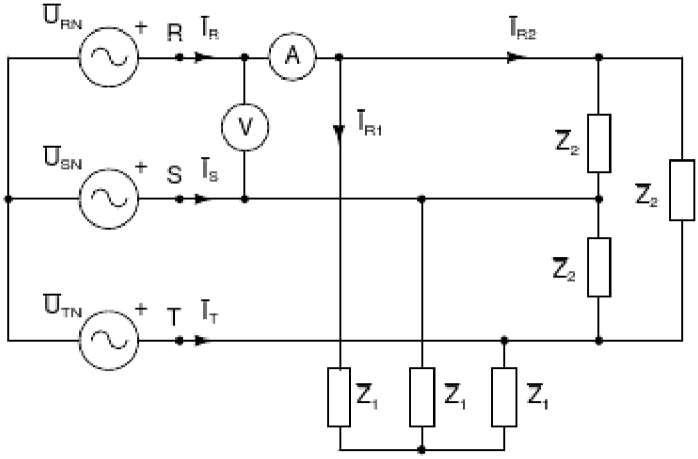


Figura 96

Si se convierte la carga 2 a su estrella equivalente se obtiene el circuito de la Figura 97.

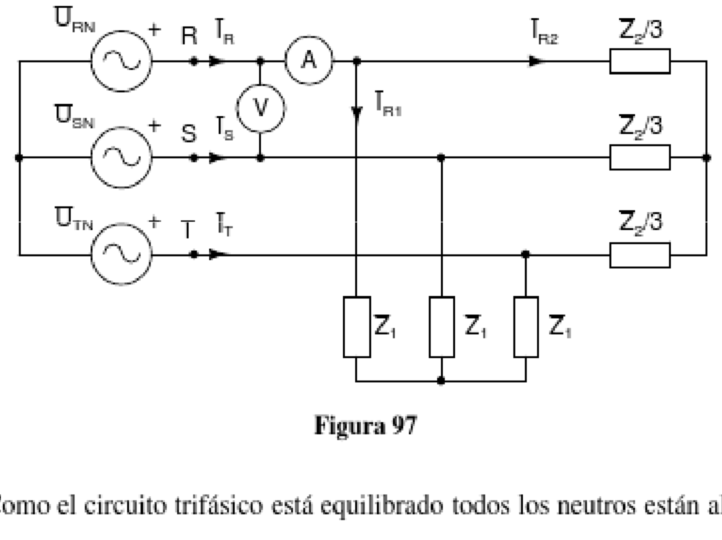


Figura 97

Como el circuito trifásico está equilibrado todos los neutros están al mismo potencial y en consecuencia según la Figura 97:

$$\overline{I}_{R1} = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_1} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{10\angle 45^\circ} \approx 23\angle -45^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_{R2} = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_2/3} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{50/3\angle 30^\circ} \approx 13{,}86\angle -30^\circ \text{ A}$$

Aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades se obtiene lo siguiente:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{R1} + \overline{I}_{R2} = 23\angle -45^\circ + 13{,}86\angle -30^\circ \approx 36{,}56\angle -39{,}37^\circ \text{ A}$$

Por tanto la lectura del amperímetro es de $36{,}56$ A.

2. Si K_1 cerrado y el resto abiertos se obtiene el circuito mostrado en la Figura 98.

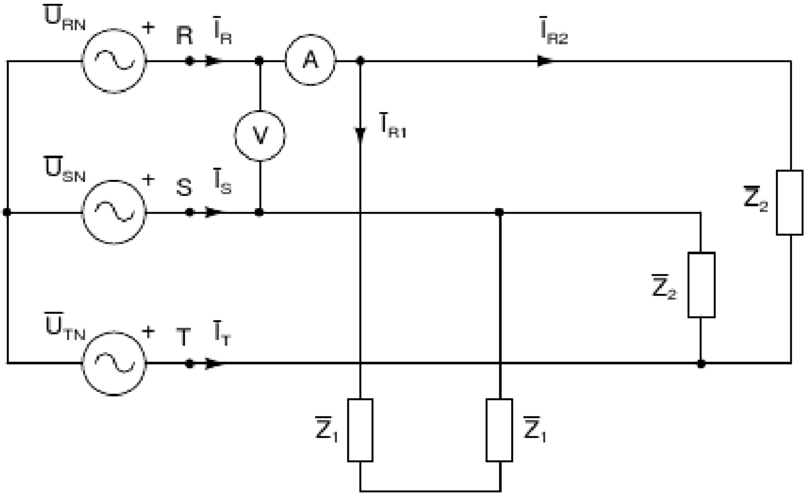


Figura 98

Según la Figura 98:

$$\overline{I}_{R1} = \frac{\overline{U}_{RS}}{2\cdot\overline{Z}_1} = \frac{400\angle 30^\circ}{20\angle 45^\circ} \approx 20\angle -15^\circ \text{ A}$$
$$\overline{I}_{R2} = \frac{\overline{U}_{RT}}{\overline{Z}_2} = \frac{400\angle -30^\circ}{50\angle 30^\circ} \approx 8\angle -60^\circ \text{ A}$$

Aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades se obtiene lo siguiente:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{R1} + \overline{I}_{R2} = 20\angle -15^\circ + 8\angle -60^\circ \approx 26{,}27\angle -27{,}43^\circ \text{ A}$$

Por tanto la lectura del amperímetro es de $26{,}27$ A.

3. Si K_3 está cerrado y el resto de los interruptores abiertos se obtiene el circuito mostrado en la Figura 99.

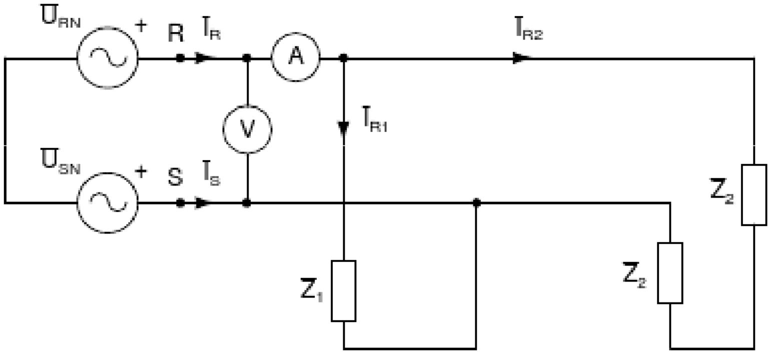


Figura 99

A partir de la Figura 99 es fácil comprobar que $\overline{Z}_1$ está en paralelo con $2\overline{Z}_2$. Así:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RS}}{\dfrac{2 \cdot \overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_1}{2 \cdot \overline{Z}_2 + \overline{Z}_1}} = \frac{400\angle 30^\circ}{\dfrac{2 \cdot 50\angle 30^\circ \cdot 10\angle 45^\circ}{2 \cdot 50\angle 30^\circ + 10\angle 45^\circ}} \approx 43{,}88\angle -13{,}64^\circ \text{ A}$$

Por tanto la lectura del amperímetro es de $43{,}88$ A.

4. Si K_4 está abierto y el resto de los interruptores cerrados se obtiene el circuito mostrado en la Figura 100.

Según la Figura 100:

$$\overline{I}_{R1} = \frac{\overline{U}_{RS}}{\overline{Z}_1} = \frac{400\angle 30^\circ}{10\angle 45^\circ} \approx 40\angle -15^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}_{R2} = \frac{\overline{U}_{RT}}{\overline{Z}_2} = \frac{400\angle -30^\circ}{50\angle 30^\circ} \approx 8\angle -60^\circ \text{ A}$$

Aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades se obtiene lo siguiente:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{R1} + \overline{I}_{R2} = 40\angle -15^\circ + 8\angle -60^\circ \approx 46\angle -22{,}06^\circ \text{ A}$$

Por tanto la lectura del amperímetro es de 46 A.

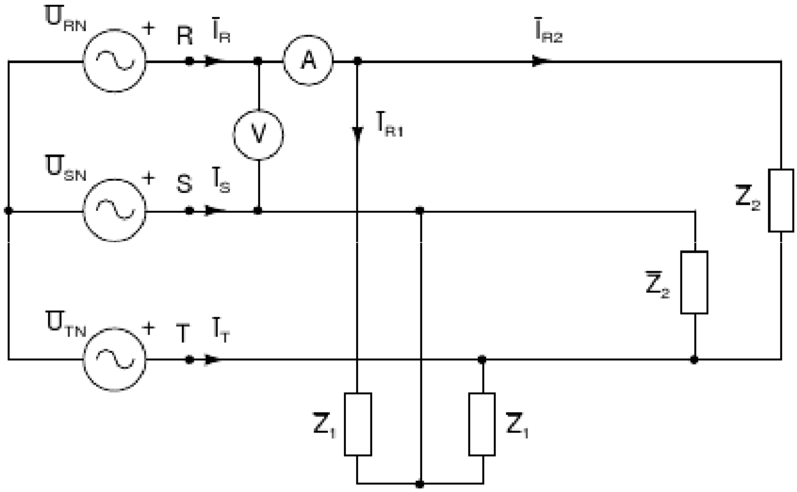


Figura 100

PROBLEMA 45

El circuito trifásico de la Figura 101 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones, equilibrado y de secuencia inversa. Se sabe que la lectura del voltímetro 1 es 400 V, $\overline{Z}_L$=0,3∠60° Ω, $\overline{Z}_1$=10∠45° Ω y $\overline{Z}_2$=50∠30° Ω. Calcular:

1. La lectura del amperímetro.
2. La lectura del voltímetro 2.
3. La lectura del vatímetro 1 y 2.
4. La lectura del vatímetro 3.

Solución 45

1. Como el sistema trifásico está equilibrado, se puede obtener un circuito monofásico equivalente como el mostrado en la Figura 102.

   Según la Figura 102, la impedancia equivalente es

$$\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_L + \frac{\overline{Z}_1 \cdot \frac{\overline{Z}_2}{3}}{\overline{Z}_1 + \frac{\overline{Z}_2}{3}}$$

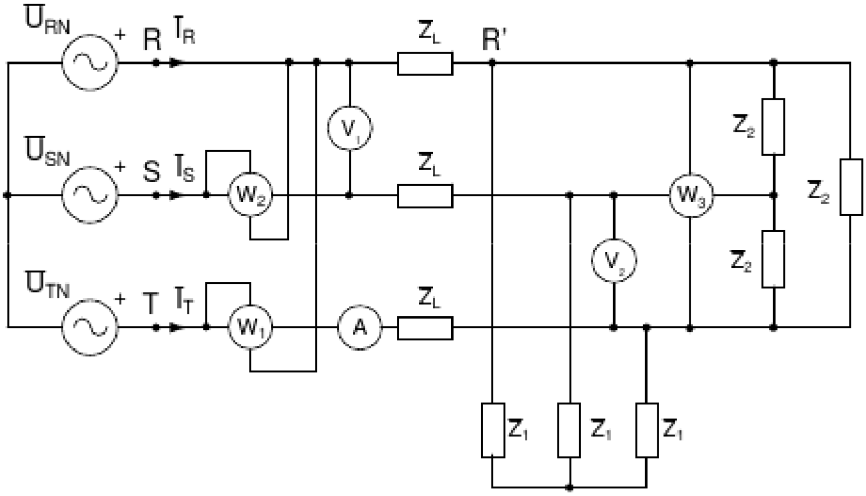


Figura 101

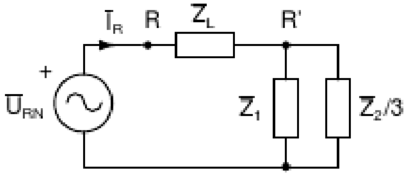


Figura 102

Sustituyendo valores resulta:

$$\overline{Z}_{eq} = 0{,}3\angle 60^\circ + \frac{10\angle 45^\circ \cdot \frac{50}{3}\angle 30^\circ}{10\angle 45^\circ + \frac{50}{3}\angle 30^\circ} \approx 6{,}58\angle 40{,}3^\circ\ \Omega$$

De esta forma:

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{U}_{RN}}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{400/\sqrt{3}\angle 0^\circ}{6{,}58\angle 40{,}3^\circ} \approx 35{,}09\angle -40{,}3^\circ\ \text{A}$$

Por tanto la lectura del amperímetro es de $35{,}09$ A.

2. Según la Figura 102:

$$\overline{U}_{RN} = \overline{U}_{R'N} + \overline{Z}_L \cdot \overline{I}_R$$

Despejando y sustituyendo valores, resulta

$$\overline{U}_{R'N} = \overline{U}_{RN} - \overline{Z}_L \cdot \overline{I}_R = \frac{400}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ - 0{,}3\angle 60^\circ \cdot 35{,}09\angle -40{,}3^\circ \approx 221{,}06\angle -0{,}92^\circ\ \text{V}$$

Por tanto, la lectura del voltímetro 2 es la siguiente:

$$V_2 = \sqrt{3} \cdot U_{R'N} = \sqrt{3} \cdot 221{,}06 \approx 383\,\mathrm{V}$$

3. Según el diagrama fasorial de la Figura 103, las lecturas de los vatímetros 1 y 2 son las siguientes:

$$W_1 = U_{TR} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TR}, \overline{I}_T}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(\varphi - 30^\circ)$$
$$W_2 = U_{SR} \cdot I_S \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{SR}, \overline{I}_S}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(30^\circ + \varphi)$$

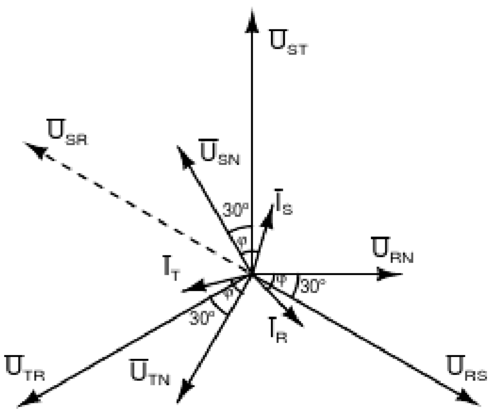


Figura 103

Si se suman las lecturas de ambos vatímetros se obtiene la potencia activa trifásica consumida por las cargas 1 y 2:

$$W_1 + W_2 = U_L \cdot I_L \cdot [\cos(\varphi - 30^\circ) + \cos(30^\circ + \varphi)] = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P$$

Si ahora se restan las lecturas de ambos vatímetros se obtiene la potencia reactiva trifásica consumida por las cargas 1 y 2:

$$W_1 - W_2 = U_L \cdot I_L \cdot [\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(30^\circ + \varphi)] = U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

donde P y Q es la potencia activa y reactiva total, que se calculan como sigue:

$$P = 3 \cdot Z_{eq} \cdot \cos\varphi_{eq} \cdot I_R^2 = 3 \cdot 6{,}58 \cdot \cos 40{,}3^\circ \cdot 35{,}09^2 \approx 18\,537{,}43\,\mathrm{W}$$
$$Q = 3 \cdot Z_{eq} \cdot \sin\varphi_{eq} \cdot I_R^2 = 3 \cdot 6{,}58 \cdot \sin 40{,}3^\circ \cdot 35{,}09^2 \approx 15\,720{,}88\,\mathrm{var}$$

Por tanto:

$$W_1 + W_2 = 18\,537{,}43\,\mathrm{W}$$
$$\sqrt{3} \cdot (W_1 - W_2) = 15\,720{,}88\,\mathrm{var}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la lectura del vatímetro 1 y 2:

$$W_1 \approx 13\,806{,}94\,\mathrm{W}$$
$$W_2 \approx 4\,730{,}53\,\mathrm{W}$$

4. Según las Figuras 101 y 103, la lectura del vatímetro 3 es la siguiente:

$$W_3 = U_{R'T'} \cdot I_{S2} \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{R'T'}, \overline{I}_{S2}}) = U_L \cdot I_L \cdot \cos(90^\circ - \varphi_2) = \frac{Q_2}{\sqrt{3}}$$

La potencia reactiva absorbida por la carga 2 es la siguiente:

$$Q_2 = 3 \cdot \frac{U_2^2}{Z_2} \cdot \sin\varphi_2 = 3 \cdot \frac{383^2}{50} \cdot \sin 30^\circ \approx 4\,400{,}67\,\mathrm{var}$$

Por tanto

$$W_3 = \frac{4\,400{,}67}{\sqrt{3}} \approx 2\,540{,}72\,\mathrm{W}$$

PROBLEMA 46

La carga de la Figura 104 se encuentra alimentada por un sistema trifásico equilibrado de tensiones de secuencia directa. La impedancia $\overline{Z}_W$ es igual a la del circuito voltimétrico de los vatímetros, los cuales son idénticos. Se pide:

1. Obtener la potencia reactiva de la carga en función de W_1 y W_2 suponiendo que está desequilibrada.

2. Obtener la potencia activa y reactiva de la carga en función de W_1 y W_2 suponiendo que está equilibrada.

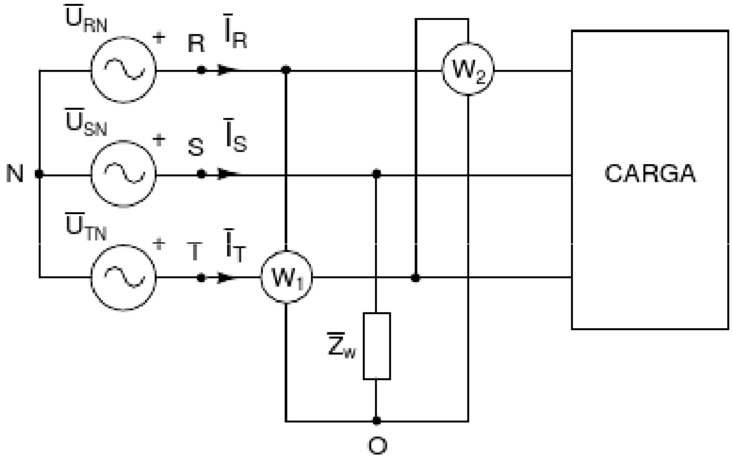


Figura 104

SOLUCIÓN 46

1. Según el enunciado, la impedancia $\overline{Z}_W$ es igual a la impedancia de la bobina voltimétrica de los vatímetros 1 y 2. Esto implica que el neutro O y el N estén al mismo potencial.

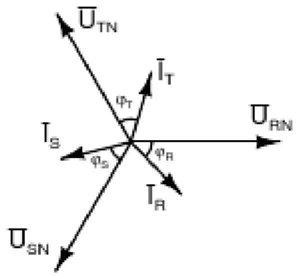


Figura 105

Según el diagrama fasorial de la Figura 105, las lecturas de los vatímetros 1 y 2 son las siguientes:

$$W_1 = U_{RO} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RO}, \overline{I}_T}) = U_{RN} \cdot I_T \cdot \cos(120^\circ - \varphi_T)$$
$$= U_{RN} \cdot I_T \cdot \cos(90^\circ + 30^\circ - \varphi_T) = U_{RN} \cdot I_T \cdot \sin(\varphi_T - 30^\circ)$$

$$W_2 = U_{TO} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TO}, \overline{I}_R}) = U_{TN} \cdot I_R \cdot \cos(\varphi_R + 120^\circ)$$
$$= U_{TN} \cdot I_R \cdot \cos(90^\circ + 30^\circ + \varphi_R) = -U_{TN} \cdot I_R \cdot \sin(30^\circ + \varphi_R)$$

Para resolver el problema se calculará en primer lugar la potencia compleja de la carga trifásica:

$$\overline{S} = \overline{U}_{RN} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{U}_{SN} \cdot \overline{I}_S^* + \overline{U}_{TN} \cdot \overline{I}_T^*$$

Como el sistema es de 3 hilos, a partir de la ley de Kirchhoff de intensidades se tiene que

$$\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \overline{I}_R^* + \overline{I}_S^* + \overline{I}_T^* = 0$$

lo cual permite expresar la intensidad $\overline{I}_S$ en función de las otras dos:

$$\overline{I}_S^* = -(\overline{I}_R^* + \overline{I}_T^*)$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
\overline{S} &= \overline{U}_{RN} \cdot \overline{I}_R^* - \overline{U}_{SN} \cdot (\overline{I}_R^* + \overline{I}_T^*) + \overline{U}_{TN} \cdot \overline{I}_T^* \\
&= (\overline{U}_{RN} - \overline{U}_{SN}) \cdot \overline{I}_R^* + (\overline{U}_{TN} - \overline{U}_{SN}) \cdot \overline{I}_T^* \\
&= \overline{U}_{RS} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{U}_{TS} \cdot \overline{I}_T^*
\end{aligned}$$

La potencia reactiva total es

$$Q = \Im m[\overline{S}] = \Im m[\overline{U}_{RS} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{U}_{TS} \cdot \overline{I}_T^*]$$

Si se fija el origen de fases en la tensión $\overline{U}_{RN}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\overline{U}_{RS} = U_{RS}\angle 30^\circ \;\; &; \;\; \overline{U}_{TS} = U_{TS}\angle 90^\circ \\
\overline{I}_R^* = I_R\angle\varphi_R \;\; &; \;\; \overline{I}_T^* = I_T\angle\varphi_T - 120^\circ
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
Q &= \Im m[\overline{S}] = \Im m[U_{RS} \cdot I_R\angle(30^\circ) + \varphi_R + U_{TS} \cdot I_T\angle(\varphi_T - 30^\circ)] \\
&= U_{RS} \cdot I_R \sin(30^\circ + \varphi_R) + U_{TS} \cdot I_T \sin(\varphi_T - 30^\circ) \\
&= \sqrt{3} \cdot U_{TN} \cdot I_R \sin(30^\circ + \varphi_R) + \sqrt{3} \cdot U_{RN} \cdot I_T \sin(\varphi_T - 30^\circ) \\
&= \sqrt{3} \cdot (W_1 - W_2)
\end{aligned}$$

2. Si la carga está equilibrada entonces

$$\varphi_R = \varphi_S = \varphi_T = \varphi$$

y las lecturas de ambos vatímetros se pueden expresar según

$$W_1 = U_{RO} \cdot I_T \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{RO}, \overline{I}_T}) = U_F \cdot I_L \cdot \sin(\varphi - 30°)$$
$$W_2 = U_{TO} \cdot I_R \cdot \cos(\widehat{\overline{U}_{TO}, \overline{I}_R}) = -U_F \cdot I_L \cdot \sin(30° + \varphi)$$

Así, es fácil comprobar las siguientes relaciones:

$$W_1 + W_2 = \frac{-P}{3}$$
$$W_1 - W_2 = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

En consecuencia:

$$P = -3(W_1 + W_2)$$
$$Q = \sqrt{3} \cdot (W_1 - W_2)$$

PROBLEMA 47

El circuito trifásico de la Figura 106 se encuentra alimentado por un sistema trifásico de tensiones, equilibrado y de secuencia inversa de 50 Hz. Sabiendo que la lectura de los amperímetros es A_1=A_2=A_3=23 A y que la potencia compleja absorbida por cada de las cargas es $\overline{S}_R$=5 290$\angle$90° VA, $\overline{S}_S$=5 290$\angle$0° VA y $\overline{S}_T$=5 290$\angle$36,87° VA, calcular:

1. La intensidad, en módulo y argumento, que circula por el neutro del sistema. Tomar $\overline{U}_{RN}$ como referencia de fases.

2. La capacidad por fase del banco de condensadores, conectados en triángulo, necesario para mejorar el factor de potencia del sistema hasta 0,9 inductivo.

SOLUCIÓN 47

1. La intensidad que circula por cada una de las fases se obtiene a partir de la potencia compleja y de la tensión de cada una de las cargas monofásicas

$$\overline{S}_F = \overline{U}_F \cdot \overline{I}_F^* \implies \overline{I} = \left(\frac{\overline{U}_F}{\overline{S}}\right)^*$$

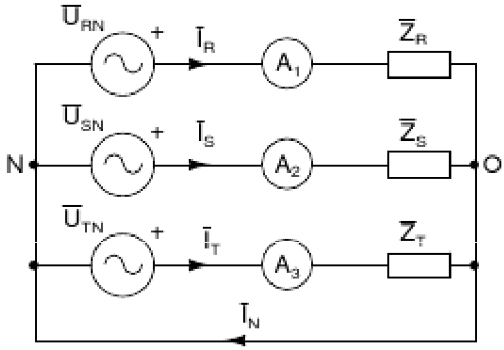


Figura 106

Sustituyendo los valores correspondientes a cada una de las fases resulta:

$$\overline{I}_R = 23\angle\varphi_R = \left(\frac{\overline{S}_R}{\overline{U}_{RN}}\right)^* = \frac{5\,290\angle-90^\circ}{U_F\angle 0^\circ} = \frac{5\,290}{U_F}\angle-90^\circ$$

$$\Longrightarrow \quad U_F = 230\,\mathrm{V} \ ; \ \varphi_R = -90^\circ$$

$$\overline{I}_S = 23\angle\varphi_R = \left(\frac{\overline{S}_S}{\overline{U}_{SN}}\right)^* = \frac{5\,290\angle 0^\circ}{U_F\angle-120^\circ} = \frac{5\,290}{U_F}\angle 120^\circ$$

$$\Longrightarrow \quad U_F = 230\,\mathrm{V} \ ; \ \varphi_S = 120^\circ$$

$$\overline{I}_T = 23\angle\varphi_T = \left(\frac{\overline{S}_T}{\overline{U}_{TN}}\right)^* = \frac{5\,290\angle-36{,}87^\circ}{U_F\angle 120^\circ} = \frac{5\,290}{U_F}\angle-156{,}87^\circ$$

$$\Longrightarrow \quad U_F = 230\,\mathrm{V} \ ; \ \varphi_S = 156{,}87^\circ$$

La intensidad que circula por el neutro es la siguiente:

$$\overline{I}_N = \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 23\angle-90^\circ + 23\angle 120^\circ + 23\angle-156{,}87^\circ$$
$$\approx 34{,}82\angle-159{,}64^\circ\,\mathrm{A}$$

2. La potencia reactiva que tiene que suministrar la batería de condensadores es la siguiente:

$$Q_C = P\cdot(\tan\varphi - \tan\varphi_N)$$

donde P es la potencia activa total que absorbe la carga trifásica

$$P = P_R + P_S + P_T = 5\,290 + 5\,290\cdot\cos(36{,}87^\circ) = 9\,522\,\mathrm{W}$$

el ángulo φ se calcula según

$$\varphi = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) = \arctan\left(\frac{Q_R + Q_S + Q_T}{P_R + P_S + P_T}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{5\,290 + 5\,290 \cdot \sin(36{,}87^\circ)}{9\,522}\right) \approx 41{,}63^\circ$$

y el ángulo φ_N es según el enunciado

$$\varphi_N = \arccos 0{,}9 = 25{,}84^\circ$$

Por tanto

$$Q_C = P \cdot (\tan 41{,}63^\circ - \tan 25{,}84^\circ) \approx 3\,852{,}28\,\mathrm{var}$$

Una vez obtenida la potencia reactiva, la capacidad por fase de la batería de condensadores teniendo en cuenta que está conectada en triángulo es la siguiente:

$$C_\triangle = \frac{Q_C/3}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U_L^2} = \frac{3\,852{,}28/3}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot (230 \cdot \sqrt{3})^2} \approx 25{,}75\,\mu\mathrm{F}$$